

INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO DE VISEU
ÁREA CIENTÍFICA DE MATEMÁTICA
13º MatViseu
(Escola de Primavera)

Sessão nº1- 3ªParte (A fórmula resolvente do 3º grau)

Pretende-se resolver uma equação do 3º grau, usando a fórmula resolvente (do 3º grau).

Para tal, analisemos três casos separadamente:

Caso 1.

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$ (1).

- Faça a mudança de variável $x = u + v$ para concluir que (1) se transforma na equação

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

- Faça $3uv + p = 0$ e verifique que u^3 e v^3 são raízes da equação $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$, isto é,

$$u^3 = -\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{6\sqrt{3}} \text{ e } v^3 = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{6\sqrt{3}}$$

$$\text{com } \Delta := 27q^2 + 4p^3$$

- Conclua que

$\leadsto$ se $\Delta > 0$ então (1) tem duas raízes complexas (conjugadas) e uma raiz real, dadas por:

$$x_1 = u_1 + v_1, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} u_1 + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} v_1, \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} u_1 + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} v_1$$

onde $u_1, v_1 \in \mathbb{R}$, $u_1^3 = u^3$ e $v_1^3 = v^3$.

$\leadsto$ se $\Delta = 0$ então (1) tem três raízes reais sendo uma delas dupla, dadas por:

$$x_1 = 2u_1, \quad x_2 = x_3 = -u_1$$

com $u_1 \in \mathbb{R}$ e $u_1^3 = u^3$.

$\leadsto$ se $\Delta < 0$ então (1) tem três raízes reais, dadas por:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\theta}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3} \right), \quad x_3 = 2\sqrt[3]{\rho} \cos \left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\text{com } \rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \text{ e } \cos \theta = -\frac{q}{2\rho}$$

Caso 2.

Equação do tipo $y^3 + by^2 + cy + d = 0$ (2).

- Faça a mudança de variável $y = x + h$ para concluir que (2) se transforma na equação

$$x^3 + (3h + b)x^2 + (3h^2 + 2hb + c)x + h^3 + bh^2 + ch + d = 0.$$

- Escolha h de forma que a equação anterior não tenha o termo em x^2 e conclua que, para esta escolha, a equação resultante é do tipo (1), isto é, é do tipo

$$x^3 + \tilde{p}x + \tilde{q} = 0,$$

$$\text{com } \tilde{p} := c - \frac{b^2}{3} \text{ e } \tilde{q} := d - \frac{cb}{3} + \frac{2b^3}{27}.$$

Caso 3.

Equação do tipo $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, $a \neq 0$ (3).

- Multiplique a equação (3) por a^2 e faça a mudança de variável $y = az$.

Conclua que a equação obtida é do tipo (2), isto é, é do tipo

$$y^3 + \tilde{b}y^2 + \tilde{c}y + \tilde{d} = 0,$$

$$\text{com } \tilde{b} := b; \tilde{c} := ac \text{ e } \tilde{d} := a^2d.$$

Exemplo: Usando o processo de obtenção da fórmula resolvente para uma equação cúbica, mostre que as soluções da equação

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0,$$

são $x_0 = -4$, $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$.