Localização das raízes de um polinómio

Márcio Nascimento

Viseu

1^{a} Parte

Um pouco de história...

Scipione del Ferro

$\downarrow$

António Maria Fior

Um pouco de história...

Scipione del Ferro

$\downarrow$

António Maria Fior $\leftrightsquigarrow$ Niccolò Tartaglia (1488-1557)

Um pouco de história...

Scipione del Ferro

$\downarrow$

António Maria Fior $\leftrightsquigarrow$ Niccolò Tartaglia (1488-1557)

$\updownarrow$

Girolamo Cardano (1501-1576)

Um pouco de história...

Scipione del Ferro

$\downarrow$

António Maria Fior $\leftrightsquigarrow$ Niccolò Tartaglia (1488-1557)

$\updownarrow$

Girolamo Cardano (1501-1576)

$\downarrow$

Lodovico Ferrari

Um pouco de história...

Scipione del Ferro

$\downarrow$

António Maria Fior $\leftrightsquigarrow$ Niccolò Tartaglia (1488-1557)

$\updownarrow$

Girolamo Cardano (1501-1576)

$\downarrow$

Lodovico Ferrari

Definições

Seja $p_n(x)$ um polinómio de grau n com coeficientes reais, isto é,

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \, , a_i \in \mathbb{R} \, , a_0 \neq 0$$

Definições

Seja $p_n(x)$ um polinómio de grau n com coeficientes reais, isto é,

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \, , a_i \in \mathbb{R} \, , a_0 \neq 0$$

$p_n(x)$ é mónico se $a_0 = 1$.

Definições

Seja $p_n(x)$ um polinómio de grau n com coeficientes reais, isto é,

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \, , a_i \in \mathbb{R} \, , a_0 \neq 0$$

$p_n(x)$ é mónico se $a_0 = 1$.

x_0 é raiz (ou zero de $p_n(x)$) se x_0 é solução da equação $p_n(x) = 0$.

Definições

Seja $p_n(x)$ um polinómio de grau n com coeficientes reais, isto é,

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \, , a_i \in \mathbb{R} \, , a_0 \neq 0$$

$p_n(x)$ é mónico se $a_0 = 1$.

x_0 é raiz (ou zero de $p_n(x)$) se x_0 é solução da equação $p_n(x) = 0$.

Observação: x_0 é raiz de $p_n(x)$ se e só se $-x_0$ é raiz de $p_n(-x)$.

Resultados gerais

Teorema Fundamental da Álgebra

A equação $p_n(x) = 0$ tem exatamente n raízes, reais ou complexas, contando cada raiz de acordo com a sua multiplicidade.

Resultados gerais

Teorema Fundamental da Álgebra

A equação $p_n(x) = 0$ tem exatamente n raízes, reais ou complexas, contando cada raiz de acordo com a sua multiplicidade.

Resultado 1

Se z é raiz de $p_n(x)$ então $\overline{z}$ é raíz de $p_n(x)$.

Resultados gerais

Teorema Fundamental da Álgebra

A equação $p_n(x) = 0$ tem exatamente n raízes, reais ou complexas, contando cada raiz de acordo com a sua multiplicidade.

Resultado 1

Se z é raiz de $p_n(x)$ então $\overline{z}$ é raíz de $p_n(x)$.

Resultado 2

Se n é ímpar então a equação $p_n(x) = 0$ tem pelo menos uma solução real e o número de soluções reais é ímpar.

Resultados gerais

Teorema Fundamental da Álgebra

A equação $p_n(x) = 0$ tem exatamente n raízes, reais ou complexas, contando cada raiz de acordo com a sua multiplicidade.

Resultado 1

Se z é raiz de $p_n(x)$ então $\overline{z}$ é raíz de $p_n(x)$.

Resultado 2

Se n é ímpar então a equação $p_n(x) = 0$ tem pelo menos uma solução real e o número de soluções reais é ímpar.

Resultado 3

Se n é par então a equação $p_n(x) = 0$ pode não ter soluções reais, mas, a existirem, o número de soluções reais é par.

Resultados gerais

Resultado 4

A equação $p_n(x) = 0$ tem solução em $]a, b[$ se $p_n(a)$ e $p_n(b)$ têm sinais contrários.

Resultados gerais

Resultado 4

A equação $p_n(x) = 0$ tem solução em $]a, b[$ se $p_n(a)$ e $p_n(b)$ têm sinais contrários.

Resultado 5

O número de raízes (reais) de $p_n(x)$ entre a e b ($a < b$), contadas com a sua multiplicidade, é par ou ímpar consoante $p_n(a)$ e $p_n(b)$ têm o mesmo sinal ou sinais contrários.

Resultados gerais

Resultado 4

A equação $p_n(x) = 0$ tem solução em $]a, b[$ se $p_n(a)$ e $p_n(b)$ têm sinais contrários.

Resultado 5

O número de raízes (reais) de $p_n(x)$ entre a e b ($a < b$), contadas com a sua multiplicidade, é par ou ímpar consoante $p_n(a)$ e $p_n(b)$ têm o mesmo sinal ou sinais contrários.

Regra de sinais de Descartes

Se os termos de um polinómio com coeficientes reais são colocados por ordem decrescente de grau, então o número de raízes positivas do polinómio é igual ao número de permutações de sinal ou menor por uma diferença par.

Regra de Ruffini

Se $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$
e $q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, então
$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - c) + r$ (com r constante), se e só se

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + cb_{i-1}, i = 1, \ldots, n-1 \\ r = a_n + cb_{n-1} \end{cases}$$

Regra de Ruffini

Se $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$
e $q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, então
$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x-c) + r$ (com r constante), se e só se

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + cb_{i-1}, i = 1, \ldots, n-1 \\ r = a_n + cb_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\
c & \downarrow + & cb_0 & \ldots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\
\hline
\times & \underbrace{a_0}_{b_0} & \underbrace{a_1 + cb_0}_{b_1} & \ldots & \underbrace{a_{n-1} + cb_{n-2}}_{b_{n-1}} & \underbrace{a_n + cb_{n-1}}_{r}
\end{array}$$

Regra de Ruffini

Se $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$
e $q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, então
$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - c) + r$ (com r constante), se e só se

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + cb_{i-1}, i = 1, \ldots, n-1 \\ r = a_n + cb_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ c & \downarrow + & cb_0 & \ldots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline \times & \underbrace{a_0}_{b_0} & \underbrace{a_1 + cb_0}_{b_1} & \ldots & \underbrace{a_{n-1} + cb_{n-2}}_{b_{n-1}} & \underbrace{a_n + cb_{n-1}}_{r} \end{array}$$

Observação:

Regra de Ruffini

Se $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$
e $q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, então
$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x-c) + r$ (com r constante), se e só se

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + cb_{i-1}, i = 1, \ldots, n-1 \\ r = a_n + cb_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ c & \downarrow + & cb_0 & \ldots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline \times & \underbrace{a_0}_{b_0} & \underbrace{a_1 + cb_0}_{b_1} & \ldots & \underbrace{a_{n-1} + cb_{n-2}}_{b_{n-1}} & \underbrace{a_n + cb_{n-1}}_{r} \end{array}$$

Observação:

- O resto da divisão de $p_n(x)$ por $x - c$ é $p_n(c)$.

Regra de Ruffini

Se $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$
e $q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, então
$p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - c) + r$ (com r constante), se e só se

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + cb_{i-1}, i = 1, \ldots, n-1 \\ r = a_n + cb_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ c & \downarrow + & cb_0 & \ldots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline \times & \underbrace{a_0}_{b_0} & \underbrace{a_1 + cb_0}_{b_1} & \ldots & \underbrace{a_{n-1} + cb_{n-2}}_{b_{n-1}} & \underbrace{a_n + cb_{n-1}}_{r} \end{array}$$

Observação:

- O resto da divisão de $p_n(x)$ por $x - c$ é $p_n(c)$.
- Se $r = 0$, c é raiz de $p_n(x)$.

Localização de raízes

Consideremos
$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \,, a_i \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0$

Localização de raízes

Consideremos

$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \; , a_i \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0$

Raízes inteiras de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio com coeficientes inteiros então as raízes inteiras de $p_n(x)$ dividem o termo independente.

Localização de raízes

Consideremos
$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\ , a_i \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0$

Raízes inteiras de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio com coeficientes inteiros então as raízes inteiras de $p_n(x)$ dividem o termo independente.

Raízes racionais de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio mónico com coeficientes inteiros então as raízes racionais de $p_n(x)$ são inteiras.

Localização de raízes

Consideremos
$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_i \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0$

Raízes inteiras de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio com coeficientes inteiros então as raízes inteiras de $p_n(x)$ dividem o termo independente.

Raízes racionais de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio mónico com coeficientes inteiros então as raízes racionais de $p_n(x)$ são inteiras.

Observação:
Se $p_n(x)$ não é mónico, multiplica-se a equação $p_n(x) = 0$ por a_0^{n-1} e fazendo a mudança de variável $y = a_0x$, obtém-se uma equação do tipo $\widehat{p}_n(y) = 0$, com $\widehat{p}_n(y)$ mónico.

Localização de raízes

Consideremos
$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \text{ , } a_i \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0$

Raízes inteiras de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio com coeficientes inteiros então as raízes inteiras de $p_n(x)$ dividem o termo independente.

Raízes racionais de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio mónico com coeficientes inteiros então as raízes racionais de $p_n(x)$ são inteiras.

Observação:
Se $p_n(x)$ não é mónico, multiplica-se a equação $p_n(x) = 0$ por a_0^{n-1} e fazendo a mudança de variável $y = a_0x$, obtém-se uma equação do tipo $\widehat{p}_n(y) = 0$, com $\widehat{p}_n(y)$ mónico.
Exemplo:

Localização de raízes

Consideremos
$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_i \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0$

Raízes inteiras de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio com coeficientes inteiros então as raízes inteiras de $p_n(x)$ dividem o termo independente.

Raízes racionais de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio mónico com coeficientes inteiros então as raízes racionais de $p_n(x)$ são inteiras.

Observação:
Se $p_n(x)$ não é mónico, multiplica-se a equação $p_n(x) = 0$ por a_0^{n-1} e fazendo a mudança de variável $y = a_0x$, obtém-se uma equação do tipo $\widehat{p}_n(y) = 0$, com $\widehat{p}_n(y)$ mónico.
Exemplo: Determine as raízes racionais do polinómio
$p(x) = 2x^3 + 3x + x^2 - 1$.

Localização de raízes

Consideremos
$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_i \in \mathbb{Z}, a_0 \neq 0$

Raízes inteiras de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio com coeficientes inteiros então as raízes inteiras de $p_n(x)$ dividem o termo independente.

Raízes racionais de equações algébricas de coeficientes inteiros:

Se $p_n(x)$ é um polinómio mónico com coeficientes inteiros então as raízes racionais de $p_n(x)$ são inteiras.

Observação:
Se $p_n(x)$ não é mónico, multiplica-se a equação $p_n(x) = 0$ por a_0^{n-1} e fazendo a mudança de variável $y = a_0x$, obtém-se uma equação do tipo $\widehat{p}_n(y) = 0$, com $\widehat{p}_n(y)$ mónico.
Exemplo: Determine as raízes racionais do polinómio
$p(x) = 2x^3 + 3x + x^2 - 1$.

Determinação do intervalo $[c_0, c_1] \subseteq \mathbb{R}$ onde se situam as raízes reais de $p_n(x)$.

Determinação do intervalo $[c_0, c_1] \subseteq \mathbb{R}$ onde se situam as raízes reais de $p_n(x)$.

Determinação de $c_1 > 0$

c_1 é um limite superior para as raízes de $p_n(x)$ se $p_n(x)$ dividido por $x - c_1$ admite um quociente com todos os coeficientes não negativos e um resto positivo.

Determinação do intervalo $[c_0, c_1] \subseteq \mathbb{R}$ onde se situam as raízes reais de $p_n(x)$.

Determinação de $c_1 > 0$

c_1 é um limite superior para as raízes de $p_n(x)$ se $p_n(x)$ dividido por $x - c_1$ admite um quociente com todos os coeficientes não negativos e um resto positivo.

Determinação de $c_0 < 0$

c_0 é um limite inferior para as raízes de $p_n(x)$ se $-c_0$ é um limite superior das raízes de $p_n(-x)$.

Exemplo:

Determinação do intervalo $[c_0, c_1] \subseteq \mathbb{R}$ onde se situam as raízes reais de $p_n(x)$.

Determinação de $c_1 > 0$

c_1 é um limite superior para as raízes de $p_n(x)$ se $p_n(x)$ dividido por $x - c_1$ admite um quociente com todos os coeficientes não negativos e um resto positivo.

Determinação de $c_0 < 0$

c_0 é um limite inferior para as raízes de $p_n(x)$ se $-c_0$ é um limite superior das raízes de $p_n(-x)$.

Exemplo: Determine um intervalo $[a, b]$ que contém todas as raízes do polinómio $p(x) = 123x^4 + 215x^3 - x^2 + 7$.

Determinação do intervalo $[c_0, c_1] \subseteq \mathbb{R}$ onde se situam as raízes reais de $p_n(x)$.

Determinação de $c_1 > 0$

c_1 é um limite superior para as raízes de $p_n(x)$ se $p_n(x)$ dividido por $x - c_1$ admite um quociente com todos os coeficientes não negativos e um resto positivo.

Determinação de $c_0 < 0$

c_0 é um limite inferior para as raízes de $p_n(x)$ se $-c_0$ é um limite superior das raízes de $p_n(-x)$.

Exemplo: Determine um intervalo $[a, b]$ que contém todas as raízes do polinómio $p(x) = 123x^4 + 215x^3 - x^2 + 7$.

2ª Parte

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

Sejam $p_1(x)$ e $p_2(x)$ dois polinómios não nulos tais que $grau(p_1(x)) \leq grau(p_2(x))$.

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

Sejam $p_1(x)$ e $p_2(x)$ dois polinómios não nulos tais que $grau(p_1(x)) \leq grau(p_2(x))$.

m.d.c

O máximo divisor comum de $p_1(x)$ e $p_2(x)$, $m.d.c(p_1(x), p_2(x))$, é um divisor comum de $p_1(x)$ e $p_2(x)$ de maior grau.

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

Sejam $p_1(x)$ e $p_2(x)$ dois polinómios não nulos tais que $grau(p_1(x)) \leq grau(p_2(x))$.

m.d.c

O máximo divisor comum de $p_1(x)$ e $p_2(x)$, $m.d.c(p_1(x), p_2(x))$, é um divisor comum de $p_1(x)$ e $p_2(x)$ de maior grau.

Observação:

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

Sejam $p_1(x)$ e $p_2(x)$ dois polinómios não nulos tais que $grau(p_1(x)) \leq grau(p_2(x))$.

m.d.c

O máximo divisor comum de $p_1(x)$ e $p_2(x)$, $m.d.c(p_1(x), p_2(x))$, é um divisor comum de $p_1(x)$ e $p_2(x)$ de maior grau.

Observação:

Existe uma infinidade de m.d.c., entre dois polinómios, diferindo entre si por uma constante.

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

Sejam $p_1(x)$ e $p_2(x)$ dois polinómios não nulos tais que $grau(p_1(x)) \leq grau(p_2(x))$.

m.d.c

O máximo divisor comum de $p_1(x)$ e $p_2(x)$, $m.d.c(p_1(x), p_2(x))$, é um divisor comum de $p_1(x)$ e $p_2(x)$ de maior grau.

Observação:
Existe uma infinidade de m.d.c., entre dois polinómios, diferindo entre si por uma constante.
Como determinar o $m.d.c(p_1(x), p_2(x))$?

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

- Dividimos $p_2(x)$ por $p_1(x)$ e obtemos $p_2(x) = q(x)p_1(x) + r(x)$, com $grau(r(x)) < grau(p_1(x))$

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

- Dividimos $p_2(x)$ por $p_1(x)$ e obtemos $p_2(x) = q(x)p_1(x) + r(x)$, com $grau(r(x)) < grau(p_1(x))$
- se $r(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = p_1(x)$

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

- Dividimos $p_2(x)$ por $p_1(x)$ e obtemos $p_2(x) = q(x)p_1(x) + r(x)$, com $grau(r(x)) < grau(p_1(x))$
- se $r(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = p_1(x)$
- se $r(x) \neq 0$ então dividimos $p_1(x)$ por $r(x)$ e obtemos $p_1(x) = q_1(x)r(x) + r_1(x)$ com $grau(r_1(x)) < grau(r(x))$

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

- Dividimos $p_2(x)$ por $p_1(x)$ e obtemos $p_2(x) = q(x)p_1(x) + r(x)$, com $grau(r(x)) < grau(p_1(x))$
- se $r(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = p_1(x)$
- se $r(x) \neq 0$ então dividimos $p_1(x)$ por $r(x)$ e obtemos $p_1(x) = q_1(x)r(x) + r_1(x)$ com $grau(r_1(x)) < grau(r(x))$
- se $r_1(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = r(x)$

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

- Dividimos $p_2(x)$ por $p_1(x)$ e obtemos $p_2(x) = q(x)p_1(x) + r(x)$, com $grau(r(x)) < grau(p_1(x))$
- se $r(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = p_1(x)$
- se $r(x) \neq 0$ então dividimos $p_1(x)$ por $r(x)$ e obtemos $p_1(x) = q_1(x)r(x) + r_1(x)$ com $grau(r_1(x)) < grau(r(x))$
- se $r_1(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = r(x)$
- se $r_1(x) \neq 0$ então dividimos $r(x)$ por $r_1(x)$ e obtemos $r(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

- Dividimos $p_2(x)$ por $p_1(x)$ e obtemos $p_2(x) = q(x)p_1(x) + r(x)$, com $grau(r(x)) < grau(p_1(x))$
- se $r(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = p_1(x)$
- se $r(x) \neq 0$ então dividimos $p_1(x)$ por $r(x)$ e obtemos $p_1(x) = q_1(x)r(x) + r_1(x)$ com $grau(r_1(x)) < grau(r(x))$
- se $r_1(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = r(x)$
- se $r_1(x) \neq 0$ então dividimos $r(x)$ por $r_1(x)$ e obtemos $r(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$
- (...) até encontrarmos um resto r_p(x) nulo

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

- Dividimos $p_2(x)$ por $p_1(x)$ e obtemos $p_2(x) = q(x)p_1(x) + r(x)$, com $grau(r(x)) < grau(p_1(x))$
- se $r(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = p_1(x)$
- se $r(x) \neq 0$ então dividimos $p_1(x)$ por $r(x)$ e obtemos $p_1(x) = q_1(x)r(x) + r_1(x)$ com $grau(r_1(x)) < grau(r(x))$
- se $r_1(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = r(x)$
- se $r_1(x) \neq 0$ então dividimos $r(x)$ por $r_1(x)$ e obtemos $r(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$
- (...) até encontrarmos um resto r_p(x) nulo
- O $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = r_{p-1}(x)$

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

- Dividimos $p_2(x)$ por $p_1(x)$ e obtemos $p_2(x) = q(x)p_1(x) + r(x)$, com $grau(r(x)) < grau(p_1(x))$
- se $r(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = p_1(x)$
- se $r(x) \neq 0$ então dividimos $p_1(x)$ por $r(x)$ e obtemos $p_1(x) = q_1(x)r(x) + r_1(x)$ com $grau(r_1(x)) < grau(r(x))$
- se $r_1(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = r(x)$
- se $r_1(x) \neq 0$ então dividimos $r(x)$ por $r_1(x)$ e obtemos $r(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$
- (...) até encontrarmos um resto r_p(x) nulo
- O $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = r_{p-1}(x)$

Máximo divisor comum, m.d.c, entre dois polinómios

- Dividimos $p_2(x)$ por $p_1(x)$ e obtemos $p_2(x) = q(x)p_1(x) + r(x)$, com $grau(r(x)) < grau(p_1(x))$
- se $r(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = p_1(x)$
- se $r(x) \neq 0$ então dividimos $p_1(x)$ por $r(x)$ e obtemos $p_1(x) = q_1(x)r(x) + r_1(x)$ com $grau(r_1(x)) < grau(r(x))$
- se $r_1(x) = 0$ então $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = r(x)$
- se $r_1(x) \neq 0$ então dividimos $r(x)$ por $r_1(x)$ e obtemos $r(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x)$
- (...) até encontrarmos um resto r_p(x) nulo
- O $m.d.c(p_1(x), p_2(x)) = r_{p-1}(x)$

Exemplo: Determine $m.d.c.(p_1(x), p_2(x))$, onde $p_1(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ e $p_2(x) = p_1'(x)$.

Método do m.d.c. para determinar as raízes de um polinómio

$m.d.c.(p(x), p'(x))$

Se $p(x) = a(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_k)^{m_k}$ então
$m.d.c.(p(x), p'(x)) = a(x-\alpha_1)^{m_1-1}(x-\alpha_2)^{m_2-1}\dots(x-\alpha_k)^{m_k-1}$

Método do m.d.c. para determinar as raízes de um polinómio

$m.d.c.(p(x), p'(x))$

Se $p(x) = a(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_k)^{m_k}$ então
$m.d.c.(p(x), p'(x)) = a(x-\alpha_1)^{m_1-1}(x-\alpha_2)^{m_2-1}\ldots(x-\alpha_k)^{m_k-1}$

Consideremos X_j o produto de fatores lineares do tipo $(x-a)$, correspondentes às raízes de multiplicidade j.
Admita-se que $f(x) = aX_1X_2^2X_3^3\ldots X_{k-1}^{k-1}X_k^k$ então:

$$\begin{cases} f_1(x) := m.d.c(f(x), f'(x)) = aX_2X_3^2\ldots X_{k-1}^{k-2}X_k^{k-1} \\ f_2(x) := m.d.c(f_1(x), f_1'(x)) = aX_3\ldots X_{k-1}^{k-3}X_k^{k-2} \\ f_3(x) := m.d.c(f_2(x), f_2'(x)) = aX_4\ldots X_k^{k-3} \\ \vdots \\ f_{k-1}(x) := m.d.c(f_{k-2}(x), f_{k-2}'(x)) = aX_k \\ f_k(x) := m.d.c(f_{k-1}(x), f_{k-1}'(x)) = a \end{cases}$$

Método do m.d.c. para determinar as raízes de um polinómio

$$\begin{cases} g_1(x) := \frac{f(x)}{f_1(x)} = X_1 \ldots X_k \\ g_2(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = X_2 \ldots X_k \\ g_3(x) := \frac{f_2(x)}{f_3(x)} = X_3 \ldots X_k \\ \vdots \\ g_{k-1}(x) := \frac{f_{k-2}(x)}{f_{k-1}(x)} = X_{k-1}X_k \\ g_k(x) := \frac{f_{k-1}(x)}{f_k(x)} = X_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = X_1 \\ h_2(x) := \frac{g_2(x)}{g_3(x)} = X_2 \\ \vdots \\ h_{k-1}(x) := \frac{g_{k-1}(x)}{g_k(x)} = X_{k-1} \\ h_k(x) := g_k(x) = X_k \end{cases}$$

Método do m.d.c. para determinar as raízes de um polinómio

$$
\left\{\begin{array}{l}
g_1(x) := \frac{f(x)}{f_1(x)} = X_1 \dots X_k \\
g_2(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = X_2 \dots X_k \\
g_3(x) := \frac{f_2(x)}{f_3(x)} = X_3 \dots X_k \\
\vdots \\
g_{k-1}(x) := \frac{f_{k-2}(x)}{f_{k-1}(x)} = X_{k-1} X_k \\
g_k(x) := \frac{f_{k-1}(x)}{f_k(x)} = X_k
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{l}
h_1(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = X_1 \\
h_2(x) := \frac{g_2(x)}{g_3(x)} = X_2 \\
\vdots \\
h_{k-1}(x) := \frac{g_{k-1}(x)}{g_k(x)} = X_{k-1} \\
h_k(x) := g_k(x) = X_k
\end{array}\right.
$$

Os zeros de $p(x)$ de multiplicidade j correspondem aos zeros de $h_j(x), j = 1, 2, \dots k$.

Exemplo:

Método do m.d.c. para determinar as raízes de um polinómio

$$\begin{cases} g_1(x) := \frac{f(x)}{f_1(x)} = X_1 \dots X_k \\ g_2(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = X_2 \dots X_k \\ g_3(x) := \frac{f_2(x)}{f_3(x)} = X_3 \dots X_k \\ \vdots \\ g_{k-1}(x) := \frac{f_{k-2}(x)}{f_{k-1}(x)} = X_{k-1}X_k \\ g_k(x) := \frac{f_{k-1}(x)}{f_k(x)} = X_k \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = X_1 \\ h_2(x) := \frac{g_2(x)}{g_3(x)} = X_2 \\ \vdots \\ h_{k-1}(x) := \frac{g_{k-1}(x)}{g_k(x)} = X_{k-1} \\ h_k(x) := g_k(x) = X_k \end{cases}$$

Os zeros de $p(x)$ de multiplicidade j correspondem aos zeros de $h_j(x), j = 1, 2, \dots k$.

Exemplo: Determine as raízes do polinómio $p(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$.

Método do m.d.c. para determinar as raízes de um polinómio

$$\begin{cases} g_1(x) := \frac{f(x)}{f_1(x)} = X_1 \ldots X_k \\ g_2(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = X_2 \ldots X_k \\ g_3(x) := \frac{f_2(x)}{f_3(x)} = X_3 \ldots X_k \\ \vdots \\ g_{k-1}(x) := \frac{f_{k-2}(x)}{f_{k-1}(x)} = X_{k-1}X_k \\ g_k(x) := \frac{f_{k-1}(x)}{f_k(x)} = X_k \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = X_1 \\ h_2(x) := \frac{g_2(x)}{g_3(x)} = X_2 \\ \vdots \\ h_{k-1}(x) := \frac{g_{k-1}(x)}{g_k(x)} = X_{k-1} \\ h_k(x) := g_k(x) = X_k \end{cases}$$

Os zeros de $p(x)$ de multiplicidade j correspondem aos zeros de $h_j(x), j = 1, 2, \ldots k$.

Exemplo: Determine as raízes do polinómio $p(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$.

3ª Parte

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Considere a equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0 \qquad (1).$

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Considere a equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0 \qquad (1).$

- Faça a mudança de variável $x = u + v$ para concluir que (1) se transforma na equação $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Considere a equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0 \qquad (1).$

- Faça a mudança de variável $x = u + v$ para concluir que (1) se transforma na equação $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.
- Faça $3uv + p = 0$ e conclua que u^3 e v^3 são raízes da equação do segundo grau $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Considere a equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0 \qquad (1).$

- Faça a mudança de variável $x = u + v$ para concluir que (1) se transforma na equação $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0\,.$
- Faça $3uv + p = 0$ e conclua que u^3 e v^3 são raízes da equação do segundo grau $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0\,.$

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Considere a equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0 \qquad (1).$

- Faça a mudança de variável $x = u + v$ para concluir que (1) se transforma na equação $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.
- Faça $3uv + p = 0$ e conclua que u^3 e v^3 são raízes da equação do segundo grau $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$.

Designe $\triangle := 27q^2 + 4p^3$ e conclua que:

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Considere a equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0 \qquad (1).$

- Faça a mudança de variável $x = u + v$ para concluir que (1) se transforma na equação $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.
- Faça $3uv + p = 0$ e conclua que u^3 e v^3 são raízes da equação do segundo grau $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Designe $\triangle := 27q^2 + 4p^3$ e conclua que:

- se $\triangle < 0$ então (1) tem três raízes reais.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Considere a equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$.

- Faça a mudança de variável $x = u + v$ para concluir que (1) se transforma na equação $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.
- Faça $3uv + p = 0$ e conclua que u^3 e v^3 são raízes da equação do segundo grau $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$.

Designe $\triangle := 27q^2 + 4p^3$ e conclua que:

- se $\triangle < 0$ então (1) tem três raízes reais.
- se $\triangle = 0$ então (1) tem três raízes reais sendo uma delas dupla.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Considere a equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$.

- Faça a mudança de variável $x = u + v$ para concluir que (1) se transforma na equação $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.
- Faça $3uv + p = 0$ e conclua que u^3 e v^3 são raízes da equação do segundo grau $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Designe $\triangle := 27q^2 + 4p^3$ e conclua que:

- se $\triangle < 0$ então (1) tem três raízes reais.
- se $\triangle = 0$ então (1) tem três raízes reais sendo uma delas dupla.
- se $\triangle > 0$ então (1) tem duas raízes complexas (conjugadas) e uma raiz real.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Considere a equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0 \qquad (1).$

- Faça a mudança de variável $x = u + v$ para concluir que (1) se transforma na equação $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.
- Faça $3uv + p = 0$ e conclua que u^3 e v^3 são raízes da equação do segundo grau $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Designe $\triangle := 27q^2 + 4p^3$ e conclua que:

- se $\triangle < 0$ então (1) tem três raízes reais.
- se $\triangle = 0$ então (1) tem três raízes reais sendo uma delas dupla.
- se $\triangle > 0$ então (1) tem duas raízes complexas (conjugadas) e uma raiz real.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $x^3 + px + q = 0$

Considere a equação do 3º grau do tipo $x^3 + px + q = 0 \qquad (1).$

- Faça a mudança de variável $x = u + v$ para concluir que (1) se transforma na equação $u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$.
- Faça $3uv + p = 0$ e conclua que u^3 e v^3 são raízes da equação do segundo grau $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Designe $\triangle := 27q^2 + 4p^3$ e conclua que:

- se $\triangle < 0$ então (1) tem três raízes reais.
- se $\triangle = 0$ então (1) tem três raízes reais sendo uma delas dupla.
- se $\triangle > 0$ então (1) tem duas raízes complexas (conjugadas) e uma raiz real.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $y^3 + by^2 + cy + d = 0 \qquad (2)$.

Considere a equação do 3º grau do tipo
$y^3 + by^2 + cy + d = 0 \qquad (2)\,.$

- Faça a mudança de variável $y = x + h$ para concluir que (2) se transforma na equação

$$x^3 + (3h + b)x^2 + (3h^2 + 2hb + c)x + h^3 + bh^2 + ch + d = 0\,.$$

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $y^3 + by^2 + cy + d = 0 \qquad (2)$.

Considere a equação do 3º grau do tipo
$y^3 + by^2 + cy + d = 0 \qquad (2)\,.$

- Faça a mudança de variável $y = x + h$ para concluir que (2) se transforma na equação

$$x^3 + (3h + b)x^2 + (3h^2 + 2hb + c)x + h^3 + bh^2 + ch + d = 0\,.$$

- Escolha h de forma que a equação anterior não tenha o termo em x^2 e conclua que, para esta escolha, a equação resultante é do tipo (1), isto é, é do tipo

$$x^3 + \widetilde{p}x + \widetilde{q} = 0\,,$$

com $\widetilde{p} := c - \frac{b^2}{3}$ e $\widetilde{q} := d - \frac{cb}{3} + \frac{2b^3}{27}$.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $y^3 + by^2 + cy + d = 0 \qquad (2)$.

Considere a equação do 3º grau do tipo
$y^3 + by^2 + cy + d = 0 \qquad (2)\,.$

- Faça a mudança de variável $y = x + h$ para concluir que (2) se transforma na equação

$$x^3 + (3h + b)x^2 + (3h^2 + 2hb + c)x + h^3 + bh^2 + ch + d = 0\,.$$

- Escolha h de forma que a equação anterior não tenha o termo em x^2 e conclua que, para esta escolha, a equação resultante é do tipo (1), isto é, é do tipo

$$x^3 + \widetilde{p}x + \widetilde{q} = 0\,,$$

com $\widetilde{p} := c - \dfrac{b^2}{3}$ e $\widetilde{q} := d - \dfrac{cb}{3} + \dfrac{2b^3}{27}$.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $y^3 + by^2 + cy + d = 0 \qquad (2)$.

Considere a equação do 3º grau do tipo
$y^3 + by^2 + cy + d = 0 \qquad (2)$.

- Faça a mudança de variável $y = x + h$ para concluir que (2) se transforma na equação

$$x^3 + (3h + b)x^2 + (3h^2 + 2hb + c)x + h^3 + bh^2 + ch + d = 0\,.$$

- Escolha h de forma que a equação anterior não tenha o termo em x^2 e conclua que, para esta escolha, a equação resultante é do tipo (1), isto é, é do tipo

$$x^3 + \widetilde{p}x + \widetilde{q} = 0\,,$$

com $\widetilde{p} := c - \dfrac{b^2}{3}$ e $\widetilde{q} := d - \dfrac{cb}{3} + \dfrac{2b^3}{27}$.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a \neq 0 \qquad (3).$

Considere a equação do 3º grau do tipo
$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a \neq 0 \qquad (3).$

- Multiplique a equação (3) por a^2 e faça a mudança de variável $y = az$.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a \neq 0 \qquad (3)$.

Considere a equação do 3º grau do tipo
$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a \neq 0 \qquad (3)$.

- Multiplique a equação (3) por a^2 e faça a mudança de variável $y = az$.
- Conclua que a equação obtida é do tipo (2), isto é, é do tipo

$$y^3 + \widetilde{b}y^2 + \widetilde{c}y + \widetilde{d} = 0\,,$$

com $\widetilde{b} := b$; $\widetilde{c} := ac$ e $\widetilde{d} := a^2d$.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \ \ a \neq 0 \qquad (3).$

Considere a equação do 3º grau do tipo
$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \ \ a \neq 0 \qquad (3).$

- Multiplique a equação (3) por a^2 e faça a mudança de variável $y = az$.
- Conclua que a equação obtida é do tipo (2), isto é, é do tipo

$$y^3 + \widetilde{b}y^2 + \widetilde{c}y + \widetilde{d} = 0\,,$$

com $\widetilde{b} := b$; $\widetilde{c} := ac$ e $\widetilde{d} := a^2d$.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a \neq 0 \qquad (3).$

Considere a equação do 3º grau do tipo
$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a \neq 0 \qquad (3).$

- Multiplique a equação (3) por a^2 e faça a mudança de variável $y = az$.
- Conclua que a equação obtida é do tipo (2), isto é, é do tipo

$$y^3 + \widetilde{b}y^2 + \widetilde{c}y + \widetilde{d} = 0\,,$$

com $\widetilde{b} := b$; $\widetilde{c} := ac$ e $\widetilde{d} := a^2 d$.

A fórmula resolvente do 3º grau

Equação do tipo $az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a \neq 0 \qquad (3).$

Considere a equação do 3º grau do tipo
$az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \quad a \neq 0 \qquad (3).$

- Multiplique a equação (3) por a^2 e faça a mudança de variável $y = az$.
- Conclua que a equação obtida é do tipo (2), isto é, é do tipo

$$y^3 + \widetilde{b}y^2 + \widetilde{c}y + \widetilde{d} = 0\,,$$

com $\widetilde{b} := b$; $\widetilde{c} := ac$ e $\widetilde{d} := a^2d$.

Exemplo: Usando o processo de obtenção da fórmula resolvente para uma equação cúbica, mostre que as soluções da equação

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0\;,$$

são $x_0 = -4$, $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$.

A revelação de Tartaglia a Cardano (em verso)

" Quando o cubo junto com as coisas
Se iguala a algum número
Descobre dois outros que difiram do conhecido
E faz como é usual
Que o produto seja sempre igual
Ao cubo da terça parte das coisas
Então a diferença
Dos seus lados cúbicos bem subtraídos
Valerá a tua coisa principal (...)"

A revelação de Tartaglia a Cardano (em verso)

“ Quando o cubo junto com as coisas
Se iguala a algum número
Descobre dois outros que difiram do conhecido
E faz como é usual
Que o produto seja sempre igual
Ao cubo da terça parte das coisas
Então a diferença
Dos seus lados cúbicos bem subtraídos
Valerá a tua coisa principal (...)”

A “coisa” era a incógnita, digamos x.

A revelação de Tartaglia a Cardano (em verso)

" Quando o cubo junto com as coisas
Se iguala a algum número
Descobre dois outros que difiram do conhecido
E faz como é usual
Que o produto seja sempre igual
Ao cubo da terça parte das coisas
Então a diferença
Dos seus lados cúbicos bem subtraídos
Valerá a tua coisa principal (...)"

A "coisa" era a incógnita, digamos x. Então estes versos querem dizer que a equação seria do tipo $x^3 + px = q$.

A revelação de Tartaglia a Cardano (em verso)

“ Quando o cubo junto com as coisas
Se iguala a algum número
Descobre dois outros que difiram do conhecido
E faz como é usual
Que o produto seja sempre igual
Ao cubo da terça parte das coisas
Então a diferença
Dos seus lados cúbicos bem subtraídos
Valerá a tua coisa principal (...)”

A “coisa” era a incógnita, digamos x. Então estes versos querem dizer que a equação seria do tipo $x^3 + px = q$. Para a resolver seria preciso encontrar dois números cuja diferença fosse igual ao número dado q, isto é, $a - b = q$,

A revelação de Tartaglia a Cardano (em verso)

“ Quando o cubo junto com as coisas
Se iguala a algum número
Descobre dois outros que difiram do conhecido
E faz como é usual
Que o produto seja sempre igual
Ao cubo da terça parte das coisas
Então a diferença
Dos seus lados cúbicos bem subtraídos
Valerá a tua coisa principal (. . .)”

A “coisa” era a incógnita, digamos x. Então estes versos querem dizer que a equação seria do tipo $x^3 + px = q$. Para a resolver seria preciso encontrar dois números cuja diferença fosse igual ao número dado q, isto é, $a - b = q$,e cujo produto seja igual “ao cubo da terça parte das coisas”, isto é, $a\,b = \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

A revelação de Tartaglia a Cardano (em verso)

" Quando o cubo junto com as coisas
Se iguala a algum número
Descobre dois outros que difiram do conhecido
E faz como é usual
Que o produto seja sempre igual
Ao cubo da terça parte das coisas
Então a diferença
Dos seus lados cúbicos bem subtraídos
Valerá a tua coisa principal (...)"

A "coisa" era a incógnita, digamos x. Então estes versos querem dizer que a equação seria do tipo $x^3 + px = q$. Para a resolver seria preciso encontrar dois números cuja diferença fosse igual ao número dado q, isto é, $a - b = q$,e cujo produto seja igual "ao cubo da terça parte das coisas", isto é, $a\,b = \left(\frac{p}{3}\right)^3$. A solução será igual à diferença das raízes cúbicas de a e de b.

A revelação de Tartaglia a Cardano (em verso)

" Quando o cubo junto com as coisas
Se iguala a algum número
Descobre dois outros que difiram do conhecido
E faz como é usual
Que o produto seja sempre igual
Ao cubo da terça parte das coisas
Então a diferença
Dos seus lados cúbicos bem subtraídos
Valerá a tua coisa principal (...)"

A "coisa" era a incógnita, digamos x. Então estes versos querem dizer que a equação seria do tipo $x^3 + px = q$. Para a resolver seria preciso encontrar dois números cuja diferença fosse igual ao número dado q, isto é, $a - b = q$,e cujo produto seja igual "ao cubo da terça parte das coisas", isto é, $a\,b = \left(\frac{p}{3}\right)^3$. A solução será igual à diferença das raízes cúbicas de a e de b. FIM