

INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO DE VISEU

ÁREA CIENTÍFICA DE MATEMÁTICA

13º MatViseu

(Escola de Primavera)

Sessão nº1 (Localização das raízes de um polinómio)

Prova de Avaliação e tópicos de resolução.

1. Considere o polinómio de grau 11

$$p_{11}(x) = x^{11} + 7x^2 - 12x^9 + x^5 + 1$$

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ é a única raiz positiva de $p_{11}(x)$.

Tópicos de resolução: Pela regra de sinais de Descartes, $p_{11}(x) = x^{11} - 12x^9 + x^5 + 7x^2 + 1$ terá duas ou zero raízes reais positivas (pois existem duas trocas de sinais, $+ - + + +$). A afirmação é falsa.

(b) $p_{11}(x)$ tem pelo menos uma raiz real negativa.

Tópicos de resolução: Pela regra de sinais de Descartes, $p_{11}(-x) = -x^{11} + 12x^9 - x^5 + 7x^2 + 1$ terá uma ou três raízes reais positivas, (pois existem três trocas de sinais, $- + - + +$), logo o polinómio $p_{11}(x)$ terá pelo menos uma raiz real negativa. A afirmação é verdadeira.

(c) $-\frac{1}{2}$ é raiz de $p_{11}(x)$.

Tópicos de resolução: As raízes racionais de $p_{11}(x)$ são inteiras (pois $p_{11}(x)$ é um polinómio mónico de coeficientes inteiros) e $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. A afirmação é falsa.

(d) As raízes reais de $p_{11}(x)$ estão localizadas no intervalo $] -4, 4[$.

Tópicos de resolução: Como

$$\begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 4 & & 4 & 16 & & & & & & & & \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & > 0 \end{array}$$

concluimos que 4 é um limite superior das raízes de $p_{11}(x)$.

Por outro lado, as raízes de $p_{11}(-x)$ coincidem com as raízes de $-p_{11}(-x) = x^{11} - 12x^9 + x^5 - 7x^2 - 1$,

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
& 1 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 & -1 \\
4 & & 4 & 16 & & & & & & & & \\
\hline
& 1 & 4 & 4 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 & > 0
\end{array}$$

concluimos que 4 é um limite superior das raízes de $-p_{11}(-x)$ e portanto -4 é um limite inferior das raízes de $p_{11}(x)$.

Logo as raízes reais de $p_{11}(x)$ estão localizadas no intervalo $] -4, 4[$. A afirmação é verdadeira.

2. Usando o método do m.d.c, determine as raízes do seguinte polinómio:

$$p_4(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$

Tópicos de resolução: Começemos por notar que $p'_4(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2$.

Definindo

$$f_1(x) = m.d.c(p_4(x), p'_4(x)) \quad \text{e} \quad f_2(x) = m.d.c(f_1(x), f'_1(x))$$

concluimos que $f_1(x) = x - 1$ e que $f_2(x) = 1$.

Definindo

$$g_1(x) = \frac{p_4(x)}{f_1(x)} \quad \text{e} \quad g_2(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

concluimos que $g_1(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ e que $g_2(x) = x - 1$.

Definindo

$$h_1(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \quad \text{e} \quad h_2(x) = g_2(x)$$

concluimos que $h_1(x) = x^2 + 1$ e que $g_2(x) = x - 1$.

Uma vez que as raízes de multiplicidade j de $p_4(x)$ são as raízes de $h_j(x)$, concluimos que i e $-i$ são raízes simples de $p_4(x)$ e que 1 é uma raiz dupla de $p_4(x)$.

3. Usando o processo de obtenção da fórmula resolvente para uma equação cúbica, mostre que as soluções da equação

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0 \quad (1)$$

são $x_0 = -4$, $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$.

Tópicos de resolução: Fazendo a mudança de variável $x = y + h$ concluimos que (1) pode escrever-se na forma

$$y^3 + (3h + 3)y^2 + (3h^2 + 6h - 6)y + (h^3 + 3h^2 - 6h - 8) = 0 \quad (2).$$

Escolhendo h de forma que $3h + 3 = 0$ (i.e., $h = -1$), (2) transforma-se em

$$y^3 - 9y = 0 \quad (3) .$$

Fazendo uma nova mudança de variável $y = u + v$, (3) transforma-se em

$$u^3 + v^3 + (3uv - 9)(u + v) = 0 .$$

Fazendo $3uv - 9 = 0$ (i.e., $uv = 3$) obtemos

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 0 \\ u^3 v^3 = 27 , \end{cases}$$

e conclui-se que u^3 e v^3 são raízes da equação $t^2 + 27 = 0$, isto é,

$$u^3 = \sqrt{27}i = \sqrt{27}\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$v^3 = -\sqrt{27}i = \sqrt{27}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) .$$

Aplicando a fórmula de Moivre generalizada, concluímos que

$$u_k = \sqrt{3}\text{cis}\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$v_k = \sqrt{3}\text{cis}\left(\frac{-\pi + 4k\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Como $u_k \cdot v_k = 3 \in \mathbb{R}$ então as soluções da equação (3) são

$$\begin{cases} y_0 = u_0 + v_0 = 3 \\ y_1 = u_1 + v_2 = -3 \\ y_2 = u_2 + v_1 = 0 , \end{cases}$$

e, uma vez que $x_k = y_k + h$, concluímos que as soluções da equação (1) são

$$\begin{cases} x_0 = y_0 - 1 = 2 \\ x_1 = y_1 - 1 = -4 \\ x_2 = y_2 - 1 = -1 . \end{cases}$$

FIM