

Departamento *Matemática*

Disciplina *Investigação Operacional*

Curso *Engenharia Informática*

Ano *3^o*

Semestre *1^o*

Ano Lectivo *2007/2008*

Folha N^o1

1- Numa fabrica são produzidos dois tipos de artigos; A e B. Os lucros unitários associados aos artigos A e B são respectivamente 3 e 2 u.m..

Para a produção de um artigo do tipo A são necessários 2 Kg de metal e 5 horas de trabalho de um operário. Para a produção de um artigo do tipo B são necessários 4 Kg de metal e 2 horas de trabalho de um operário.

Semanalmente pode dispor-se de 20 Kg de metal. A fábrica dispõe de um trabalhador, que pode assegurar 45 horas de laboração por semana.

O gerente pretende estipular o plano de produção que maximize o lucro.

Formule o problema com um modelo de Programação Linear.

2- O gerente de uma empresa pretende renovar a frota da sua empresa.

A frota actual é composta por 20 veículos do tipo A e 10 do tipo B. Pretende-se estudar a hipótese de aquisição de veículos novos dos tipos B e C, sabendo-se que não é possível adquirir mais de 8 veículos de cada um desses tipos.

O aumento da capacidade de carga deverá ser superior a 120 unidades de volume.

A disponibilidade financeira para efectuar as novas aquisições é de 100 u.m..

Pretende-se maximizar a capacidade de carga da frota.

Tipo	Preço(u.m.)	Cap.Carg.
A	–	8
B	10	20
C	8	10

a) Formule o problema com um modelo de P.L..

3- Um certo produto alimentar é composto por três elementos (A, B e C respectivamente). Duas restrições básicas são impostas à qualidade da mistura obtida. A primeira relaciona-se com a percentagem de matéria fibrosa que não deve ser superior a 3%. A segunda impõe que a quantidade de óleo existente em cada lote de alimento obtido, deve ser inferior a duas vezes a quantidade de proteína no lote. A análise dos três elementos é a seguinte:

	% Matéria fibrosa	% Óleo	% Proteína
A	4	9	3
B	2	1	2
C	2	5	3

Disciplina *Investigação Operacional*

Ano 3^o

Semestre 1^o

Ano Lectivo 2007/2008

O elemento C é comprado a um preço fixo de 340 u.m./ton.. Os elementos A e B têm preços que variam de semana para semana, sendo no entanto fixos dentro da mesma semana. O produto alimentar é feito num único lote semanal de 100 toneladas.

Formule o problema em P.L. sabendo que o objectivo do fabricante é minimizar as despesas semanais.

4- Um agricultor pretende organizar uma dieta para os seus animais. Essa dieta inclui:

- pelo menos 0,8% mas não mais do que 1,2% de cálcio
- pelo menos 22% de proteína,
- quanto muito 5% de vitamina

Diariamente, ele deve produzir 100 Kg de uma ração que é uma mistura de 3 tipos de alimentos: milho, soja e aveia.

O conteúdo nutritivo destes ingredientes é dado na tabela seguinte:

Ingredientes	Kg/Kg de ingrediente			Custos por Kg
	cálcio	proteína	vitamina	
milho	0,38	0	0	164
soja	0,001	0,09	0,02	463
aveia	0,002	0,5	0,08	1250

Formule o problema como um de programação linear por forma a minimizar o custo total da ração produzida.

5- Equacione o problema seguinte de modo tal que o possa resolver por programação linear:

Para o fabrico de um certo produto é necessário produzir duas peças do tipo A, 5 peças do tipo B e uma peça do tipo C. Para tal dispõem-se de 4 máquinas, 1, 2, 3 e 4 podendo cada uma ser utilizada não mais de 40 horas semanais.

O custo de produzir uma peça A B ou C é igual a 5, 4 ou 6 unidades monetárias (u.m.) respectivamente, mais os encargos resultantes da utilização das máquinas. Estes valores são iguais a 20, 22, 17 e 35 u.m. por hora de utilização das máquinas 1, 2, 3 e 4 respectivamente.

Admitindo que cada unidade de produto fabricado é vendido por 1000 u.m. e que o n^o de horas de ocupação das máquinas necessária à produção de uma unidade de A, B ou C é dado no quadro 1, determine o n^o de unidades A, B e C a fabricar que maximize os lucros.

	1	2	3	4
A	2		1 ou	2
B	3	2 ou	1 ou	1
C	3 ou	1	2	

Disciplina *Investigação Operacional*

Ano 3^o

Semestre 1^o

Ano Lectivo 2007/2008

6- Uma nova unidade fabril que criará 2000 postos de trabalho vai ser instalada a uma distância acessível de 4 vilas, A, B, C e D onde serão construídas as residências para os trabalhadores e respectivas famílias.

Devido a insuficiências de equipamento e infra-estruturas a vila A pode aumentar a sua população no máximo de 1000 habitantes. As vilas C e D são servidas pela mesma rede de infra-estruturas pelo que, em conjunto, não poderão aumentar a sua população em mais de 1200 habitantes.

Pretende-se construir uma habitação por agregado familiar, estimando-se que a composição de 2000 famílias é a seguinte:

nº de pessoas por agregado familiar	1	2	3	4	5	6
% de agregados familiares	5%	25%	50%	12%	5%	3%

Podem construir-se, em qualquer uma das vilas, habitações dos tipos I, II e III que diferem essencialmente no nº de quartos e que podem alojar um mínimo de 1, 3 e 4 pessoas e um máximo de 2, 4 e 6 pessoas respectivamente. O nº máximo de trabalhadores que pode ser transportado, na hora de ponta habitual, entre as vilas B e D e o local de trabalho é de 800 e 900 respectivamente.

O custo unitário de transporte entre as vilas A, B, C e D e o local de trabalho é de 50 u.m., 70 u.m., 90 u.m. e 100u.m. respectivamente.

A empresa, que vai pagar as despesas de transporte aos seus trabalhadores pretende distribuir os 2000 fogos pelas 4 vilas de tal forma que o custo total de transporte casa-trabalho seja minimizado.

Construa um modelo de P.L. que lhe permita resolver este problema.

7- Uma empresa deseja realizar um show de televisão para publicidade dos seus produtos. O show durará meia hora, nele actuando um actor cómico e um conjunto musical.

A empresa deseja que sejam consagrados pelo menos três minutos de anúncios. A estação televisora exige que o tempo dedicado a anúncios não exceda 12 minutos, não podendo, além disso, em caso algum, ser superior ao tempo atribuído ao actor cómico. Este não está disposto a intervir durante mais de 20 minutos. Ao conjunto caberá preencher o tempo restante.

O custo de actuação do actor é de 150u.m./min.; o do conjunto de 1000u.m./minuto.

A experiência mostra que, por cada minuto em que o actor se exhibe, 4 000 espectadores ligam a TV, por cada minuto de actuação do conjunto esperam-se 2 000 novos telespectadores, por cada minuto de anúncios 1000 pessoas desligam a TV.

Formalize o problema, admitindo que a empresa tem como objectivo:

Disciplina *Investigação Operacional*

Ano 3^o

Semestre 1^o

Ano Lectivo 2007/2008

- a) Maximizar o número de telespectadores.
b) Minimizar o custo do programa.

8- Uma empresa possui 4 fábricas, nas quais são produzidas três produtos: manteiga, iogurte e queijo. Os quadros que se seguem indicam os custos de produção de uma embalagem de cada produto e o tempo (em minutos) gasto na produção:

FABRICA 1		
1 embalagem	Tempo (min)	Custo (u.m.)
Manteiga	20	50
Iogurte	40	30
Queijo	10	40

FABRICA 2		
1 embalagem	Tempo (min)	Custo (u.m.)
Manteiga	30	60
Iogurte	50	20
Queijo	20	40

FABRICA 3		
1 embalagem	Tempo (min)	Custo (u.m.)
Manteiga	20	30
Iogurte	30	30
Queijo	20	30

FABRICA 4		
1 embalagem	Tempo (min)	Custo (u.m.)
Manteiga	10	40
Iogurte	40	20
Queijo	30	30

O tempo máximo disponível (em horas) para cada fábrica é dado pela tabela seguinte:

FÁBRICAS	Tempo máximo disponível (horas)
Fábrica 1	30
Fábrica 2	40
Fábrica 3	24
Fábrica 4	48

O número mínimo de embalagens a produzir de cada um dos produtos é dado pela tabela que se segue:

PRODUTOS	n ^o mínimo de embalagens a produzir
manteiga	500
iogurte	200
queijo	300

Formule o problema como um de programação linear por forma a minimizar o custo da produção.

Disciplina *Investigação Operacional*

Ano 3^o

Semestre 1^o

Ano Lectivo 2007/2008

9- Uma estação de serviço necessita de contratar empregadas, em part-time, com diferentes necessidades consoante os dias da semana. Assim na Segunda necessita de 17 empregadas, na Terça 13, na Quarta 15, na Quinta 19, na Sexta 14, 16 para o Sábado e 11 no Domingo.

Cada empregada trabalha 5 dias consecutivos, folgando dois dias por semana. Por exemplo: uma empregada que trabalha de Segunda a Sexta, não trabalhará no Sábado e Domingo.

A estação de serviço pretende contratar um número mínimo de empregadas de modo a satisfazer as diferentes necessidades semanais.

Formule o problema de P. L. de modo a minimizar os custos de contratação.

10- O ministro da Indústria e Energia da Lusólia (pequeno país do Norte da Atlântida) está a levar a cabo uma profunda análise da grave crise energética que o seu país atravessa.

A Lusólia pode ser dividida em três regiões:

- A região Norte, essencialmente industrial, com largos aproveitamentos hidroeléctricos.
- a região Centro, onde se situa a capital Lisbólia e a sua cintura industrial. Esta região é fortemente sísmica (*).
- a região Sul, essencialmente turística, pouco aproveitada sob o ponto de vista energético.

No quadro seguinte sintetiza-se a situação actual (A) e as possibilidades futuras (F) das várias regiões:

Região	Hidroeléctrico		Centrais Carvão		Centrais Nucleares	
	A	F	A	F	A	F
N	20	+5 a +10	5	+5 a + 10	0	0 a 5
C	10	+2 a + 5	10	+5 a + 15	0	0 (*)
S	5	+10 a + 15	7	+3 a +9	0	0 a 6

Cada aproveitamento hidroeléctrico produz anualmente, em média, 5 u. e. (unidades de energia, de acordo com a Norma Lusólica nº 734). Os valores relativos às centrais a carvão e centrais nucleares são respectivamente iguais a 6 e 20 u.e./ano.

As necessidades energéticas da Lusólia (em u. e. / ano) podem ser sintetizadas no quadro seguinte:

Região	Horizonte Temporal	
	ano 2010	ano 2035
N	180	250
C	170	260
S	100	150
Global	450	660

Disciplina *Investigação Operacional*

Ano 3^o

Semestre 1^o

Ano Lectivo 2007/2008

O Ministro da Indústria e Energia pretende garantir que, para os dois horizontes temporais considerados (2010 e 2035) as necessidades energéticas da Lusólia sejam globalmente satisfeitas. Além disso, pretende-se também que a zona centro seja auto-suficiente sob o ponto de vista energético.

Os custos de construção e os encargos financeiros das várias soluções dependem dos horizontes considerados, como se pode observar no quadro que se segue:

Região	Horizonte	Encargos Financeiros		
		1999	2005	2020
Aprov. Hidroeléctrico	2010	4	2	-
	2035	3	1	1
Central Carvão	2010	3	1	-
	2035	1	2	2
Central Nuclear	2010	7	8	-
	2035	4	6	8

O Ministro da Indústria e Energia aguarda ansiosamente pelas previsões relativas às disponibilidades financeiras nos anos de 1999, 2005 e 2020. Enquanto o Ministro das Finanças e do Plano não lhe fornecer as previsões, o Ministro da Indústria e Energia considera essas disponibilidades respectivamente iguais a α , β e γ (em u.m.).

As várias "soluções" encaradas pelo Ministro suscitam diferentes graus de oposição por parte da opinião pública, como se pode observar no quadro seguinte:

Região	Aprv. Hidr.	C. Carvão	C. Nucleares
N	1	1	8
C	2	2	(*)
S	4	8	10

É objectivo do Ministro minimizar o grau de oposição global ao "Plano Energético da Lusólia". Neste sentido pede-se que ajude o Ministro, formulando o problema com um modelo de Programação Linear.

11- Durante os meses tradicionalmente escolhidos para fazer férias uma empresa decidiu contratar trabalhadores em regime temporário. As necessidades de trabalho para os meses de Junho, Julho, Agosto e Setembro são, respectivamente 90, 140, 130 e 80. A tabela seguinte refere os custos de contratação de um trabalhador que variam conforme o mês em que se inicia cada contrato e a sua duração.

1. MÊS	Duração=1mês	Duração=2meses	Duração=3meses
Junho	80	70	90
Julho	50	90	60
Agosto	100	80	
Setembro	60		

Disciplina *Investigação Operacional*

Ano 3^o

Semestre 1^o

Ano Lectivo 2007/2008

Formule o problema de P. L. de modo a minimizar os custos de contratação.

12- A empresa PRODVIS,Lda. pretende planear a sua produção para quatro meses quentes deste ano, período para o qual já aceitou as encomendas relativas ao produto XIS.

Admite-se a hipótese da existência de stock no final de cada mês, ainda que para tal se tenham de suportar custos de armazenamento.

O volume das encomendas, a capacidade de produção e os custos para cada mês são os seguintes:

MÊS	Volume de Vendas	Capacidade Produtiva	Custo unitário produção (u.m.)	Custo unitário de armazenamento (u.m.)
Setembro	60 unid.	90 unid.	70	2
Outubro	70 unid.	60 unid.	72	1
Novembro	90 unid.	80 unid.	70	1
Dezembro	70 unid.	100 unid.	65	3

Formule o problema de P. L. que permita determinar a produção para cada um dos quatro meses de forma a minimizar os custos de produção e os custos de armazenamento.

13- Uma fábrica de papel produz bobines standard de 6m de largura, que depois de cortadas em bobines mais estreitas de várias larguras de acordo com os pedidos dos clientes.

Este processo de corte leva a que normalmente uma parte de cada bobine seja desaproveitada e conseqüentemente perdida.

A fábrica recebeu a encomenda abaixo e pretende cortar as bobines standard de forma a minimizar o desperdício total:

Largura:	Nº de rolos
2,7m	30
2,1m	150
1,65m	65

Formule este problema em programação linear.

14 O departamento de marketing de determinada empresa, pretende fazer um inquérito a clientes alvo, inserido num estudo de mercado para o lançamento de um novo produto. Nesse inquérito pretende questionar pelo menos 150 esposas, 120 maridos, 100 homens solteiros e 100 mulheres solteiras. Os meios de contacto utilizados e as respectivas estimativas para as percentagens de resposta, são apresentadas na seguinte tabela:

Disciplina *Investigação Operacional*

Ano 3^o

Semestre 1^o

Ano Lectivo 2007/2008

	Telefonemas diurnos	Telefonemas nocturnos	Correio
Esposas	30%	30%	20%
Maridos	10%	30%	5%
Homens solteiros	10%	15%	5%
Mulheres solteiras	10%	20%	10%
Não respondem	40%	5%	60%

Cada chamada custa 350u.m. se for nocturna e 600 u.m. se for diurna. Cada carta enviada custa 200u.m.. Por motivos relacionados com o pessoal disponível, o n.º de chamadas nocturnas não pode exceder metade do n.º total de chamadas.

De modo a usar a informação do inquérito no referido estudo de mercado de uma forma atempada, serão apenas utilizadas as cartas recebidas nas duas primeiras semanas, que se estimam ser 70% das respondidas. O custo total associado ao inquérito não pode exceder os 400 000 u.m..

Formule o problema de programação linear que minimize o custo de efectuar o inquérito

15 - Uma “Holding” deseja investir em três companhias que fabricarão os produtos A, B, e C exclusivamente dedicados à exportação. O produto A é utilizado na produção de B e C e B é empregue no fabrico de C, de acordo com o seguinte:

- Para produzir 2 unidades de B é necessária uma unidade de A
- Para produzir uma unidade de C são necessárias, 2 unidades de B e 1 de A

A “holding” dispõe de cerca de 50 milhões de contos para empregar nestas três fábricas de forma a maximizar o valor das exportações de A, B e C. Os lucros por unidade exportada de A, B e C estão na razão de 1:3:11 respectivamente. As capacidades anuais de produção por milhão de contos investidos são de 1000, 500 e 300 unidades de A, B e C.

Formule o problema de forma a poder ser resolvido por programação linear.

16 - A empresa Sun&Sons fabrica dois tipos de calções de banho: *tanguinha* e *lycrinha*. Cada calção pode ser cozido em uma de duas máquinas, podendo cada máquina funcionar até 500 horas por mês. O tempo necessário para coser cada calção é fornecido na Tabela I.

A empresa Sun&Sons pretende numa primeira fase (Julho) vender os calções a um preço alto, para numa segunda fase (Agosto) surpreender o mercado com uma promoção verdadeiramente escaldante: baixar o preço da *tanguinha* para 25% do inicial. Segundo o presidente da empresa, esta estratégia vai fazer da *tanguinha* “a grande moda deste Verão”.

Assim, estimaram-se as quantidades máximas procuradas, em função dos preços estipulados, para os meses de Julho e Agosto (ver Tabela 2). A empresa não acumula stocks.

A empresa tem como objectivo maximizar as receitas obtidas com a venda dos calções durante os dois meses referidos.

Disciplina *Investigação Operacional*

Ano 3^o

Semestre 1^o

Ano Lectivo 2007/2008

Tabela 1\

	Máq. A	Máq. B
<i>Tanguinha</i>	2 horas	1 hora
<i>Lycrinha</i>	5 horas	3 horas

Tabela 2

	Quantidade		Preços (u.m.)	
	Julho	Agosto	Julho	Agosto
<i>Tanguinha</i>	100	240	5600	1400
<i>Lycrinha</i>	140	130	6500	6500

Formule este problema como um modelo de programação linear identificando claramente as variáveis de decisão.

17 – Uma empresa agrícola explora 3 propriedades de níveis de produtividade equivalentes. A produção de cada propriedade é limitada quer pela área utilizada, quer pela água disponível para irrigação, do seguinte modo:

Propriedade	Área utilizada (ha.)	Água disponível (m ³ /dia)
1	400	1500
2	600	2000
3	300	900

A empresa pretende fazer três plantações que diferem essencialmente no rendimento por ha. e no consumo de água. Além disso a área que pode ser afectada a cada uma das plantações é limitada do seguinte modo:

Plantações	Área máxima (ha.)	Consumo de água (m ³ /ha.)	Lucro (1000u.m./ha.)
A	700	5	12
B	800	4	9
C	300	3	3

A empresa pretende saber que área plantar de cada tipo e em cada propriedade de modo a maximizar o rendimento total.

Disciplina *Investigação
Operacional*

Ano 3^o

Semestre 1^o

Ano Lectivo 2007/2008

APLICAÇÕES DA PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA À ENGENHARIA CIVIL

18 - Uma empresa de construção civil dispõe de um terreno de 2 ha (20 000 m²) para implantar um complexo residencial, terreno esse onde, de acordo com o plano de pormenor em vigor, na área deve ser respeitado o índice de utilização de 0,5.

A empresa pode optar por construir vivendas e/ou blocos, com uma arquitectura que implica que, a cada vivenda, se associe uma área de terreno com área igual a 2,5 vezes a área de construção, e que o valor correspondente para os blocos seja de 0,8.

O lucro associado à venda de uma vivenda é estimado em 30 μ/m² de construção, sendo o valor correspondente para blocos de 20μ/m².

Qual a actuação óptima de empresa (em termos de áreas a construir de um e outro tipo) e qual o lucro dela decorrente?

19 –Em referência ao problema anterior, admita que, por razões associadas ao facto de não se dispor de capacidade para edificar mais de 6000m² de construção por período, a empresa é obrigada a fasear a construção em dois períodos e que, devido à crise do sector, se aguarda o abaixamento dos lucros de 30 para 25μ/m² no caso das vivendas e de 20 para 19μ/m² no caso dos blocos (valores já devidamente actualizados).

Qual a actuação óptima da empresa nas novas condições?

20 – Em referência ao problema 18, admita que a empresa, por acordo com a Câmara, tem de construir no mínimo 3000 m² de habitação social, com uma arquitectura que implica que, se associe uma área de terreno com área igual a 2,0 vezes a área de construção, e que o lucro associado à venda de uma vivenda é estimado em 20μ/m² de construção.

Qual a actuação óptima da empresa nas novas condições?

21 – Uma empresa de betão preparado dispõe de centrais nos sítios α, β, γ e δ com capacidade para produzir, cada uma 550 m³ de betão por dia, e tem como mercados os centros A, B, C, D, E e F, onde a procura a satisfazer é respectivamente de 250, 300, 150, 350, 500 150 m³ por dia.

O custo de transporte de 1 m³ é sensivelmente de 0,075 μ/km.

Qual o esquema óptimo de distribuição do betão preparado?

22 - Uma cidade *i* é abastecida a partir de um rio próximo, sendo a água disponível de boa qualidade.

Devido ao crescimento da população, há necessidade de planear o abastecimento futuro, prevendo-se um aumento de 56x10⁴ m³/dia.

A fonte de abastecimento actual permite que sejam disponibilizadas mais 9x10⁴ m³/dia no futuro.

Disciplina *Investigação Operacional*

Ano 3^o

Semestre 1^o

Ano Lectivo 2007/2008

Para resolver o aumento do consumo pode usar-se um aquífero próximo, contudo, a água deste apresenta alguns problemas em termos de qualidade, nomeadamente quanto ao excesso de dureza. O máximo admitido para este parâmetro é de 145 mg/l.

Pode ainda recorrer-se a um rio mais afastado, em que a água é de boa qualidade, mas em que os custos das infra-estruturas de transporte são bastante mais elevados do que os custos envolvidos para captar a água do aquífero.

Tendo em consideração o quadro correspondente, determine qual o volume a usar de cada uma delas no sentido de minimizar os custos de intervenção.

	Rio Próximo	Aquífero	Rio Afastado
Custos (u.m./m ³ ,dia)	0.132	0.264	0.396
Volume disp.(m ³ ,dia)	9*10 ⁴	46*10 ⁴	38*10 ⁴
Dureza (mg/l)	24	276	84

23 - Uma empresa transformadora, manipula aço para produzir quatro tamanhos de vigas em I : pequenas, médias, largas e extra largas. As vigas podem ser produzidas em qualquer uma de três máquinas : A, B ou C. O tamanho das vigas que cada máquina consegue produzir por hora está expresso no seguinte quadro (em metros)

máquina viga	A	B	C
pequena	300	600	800
média	250	400	700
larga	200	350	600
extra larga	100	200	300

Considere-se que cada máquina trabalha até 50 horas por semana e que os custos por hora de funcionamento das máquinas é de 3 000 u.m., 5 000 u.m. e 8 000 u.m , respectivamente. Considere-se ainda que são encomendadas 10 000, 8 000, 6 000 e 6 000 metros de cada tipo de viga, por semana, respectivamente. Formule o problema de escalonamento das máquinas como um programa linear.