Programação Linear – Abordagem Algébrica

Forma normalizada de um problema matemático de Programação Linear:

$$\max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \forall i \in \{1, \cdots, m\}$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j \in \{1, \cdots, n\}$$

- *Variáveis todas positivas*
- *Restrições sob a forma de igualdade*
- *Z – função objectivo(f.o.) a maximizar*

Consiste em encontrar a solução de um sistema de equações lineares que maximiza uma dada função objectivo linear.

Recordando alguns conceitos ….de Álgebra….

Sistemas Equivalentes

Dois sistemas são equivalentes se têm o mesmo conjunto de soluções. Uma solução de um sistema é logo solução do outro sistema.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Para resolver um sistema de equações lineares tenta-se obter um sistema equivalente que seja mais fácil de resolver.

Obtenção de um Sistema Equivalente – operações elementares:

- Multiplicação de qualquer equação do sistema por um número positivo ou negativo.
- Adição a qualquer equação de um múltiplo de outra equação do sistema.

Resolução de Sistemas de Equações Lineares – Exemplo:

Considere-se o seguinte sistema de 2 equações a 5 incógnitas:

$x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2$ (L_1)

$x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 4$ (L_2)

Sistema equivalente:

$x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2$ (L_1)

$x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2$ $(L_2 = L_2 - L_1)$

Sistema Canónico - Sistema em que em cada equação há uma variável que nessa equação tem coeficiente 1 e nas outras equações coeficiente 0 (não existe).

$\mathbf{x_1} + \mathbf{0x_2} - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 6$ $\qquad$ $\mathbf{x_1} = 6 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5$

$\mathbf{0x_1} + \mathbf{x_2} - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 2$ $\qquad$ $\mathbf{x_2} = 2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5$

Pode-se obter o conjunto de todas as soluções do sistema, dando valores arbitrários às variáveis x_3, x_4 e x_5 e calculando os valores correspondentes de x_1 e de x2.

Variáveis básicas	***Variáveis não básicas***
x_1 e x_2	x_3, x_4 e x_5

Solução básica - Todas as variáveis não básicas iguais a zero.

Ficando: $\quad x_1 = 6,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$

Solução básica admissível - Solução básica em que os valores das variáveis básicas são não-negativos.

Início: Identificar uma solução básica admissível (SBA) inicial

Verificar se a SBA é óptima:

Quando a f.o. se encontrar expressa em função das variáveis não básicas e pelo menos, um dos coeficientes for positivo, a solução básica em análise ainda não será óptima , ié, ainda será possível incrementar o valor da função objectivo (bastando para tal incrementar uma variável não básica com coeficiente positivo).

Iteração: Passar a uma solução básica admissível melhor

Qual é a variável a entrar para a base? É a variável não básica que ao passar a positiva provoca um acréscimo mais rápido na função objectivo, ié, a variável com coeficiente mais positivo na "*linha da f.o.*".

Qual é a variável a sair da base? É aquela cuja restrição de não negatividade impõe o menor limite superior ao crescimento da variável que entra na base:

Considere-se restrições AX=B. Seja X_k a variável que se pretende incrementar.

O incremento máximo de X_k será :

$$\Delta = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\}, \qquad i = 1,2,\cdots, m \; com \; a_{ik} > 0$$

Paragem: Parar quando não existe nenhuma solução básica admissível adjacente melhor que a solução actual.

Critério de optimalidade - num "*quadro simplex*" a existência de um sinal positivo na "linha da função objectivo" indica a não optimalidade da solução em análise.