

2.2. Limites e Continuidade

2.2.1. Limites em IN

Começemos por relembrar as propriedades dos limites das sucessões:

Propriedades dos Limites das Sucessões:

Sejam $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = K$ e $c \in IR$ então:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n \pm b_n] = L \pm K$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot L$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot K$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{K}, b_n \neq 0, K \neq 0$

Exemplo 1. A sucessão de termo geral $a_n = 3 + (-1)^n$ tem termos

$$2, 4, 2, 4, \dots$$

que alternam entre 2 e 4, o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

não existe, pelo que a sucessão diverge.

Exemplo 2. Para a sucessão de termo geral $b_n = \frac{n}{1 - 2n}$, dividindo o numerador e o denominador por n obtemos o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 - 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1/n) - 2} = -\frac{1}{2}$$

o que implica que a sucessão converge para $-\frac{1}{2}$.

Uma aplicação importante das sucessões infinitas é representar “somas infinitas”. Informalmente, se (a_n) é uma sucessão infinita então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

é uma **série infinita** (ou simplesmente série). Os números $a_1, a_2, \dots$ são chamados **termos da série**. Para algumas séries é conveniente começar os índices com $n = 0$ ou algum outro número inteiro. Como uma convenção de notação, é comum representar uma série infinita apenas por $\sum a_n$. Nestes casos, o valor inicial para o índice deve ser escolhido no contexto da afirmação.

Para encontrar a soma de uma série infinita, consideremos a seguinte **sucessão de somas parciais**.

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Se esta sucessão de somas parciais converge, dizemos que a série converge e tem soma indicada na seguinte definição:

Definição 1 Para a série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, a **soma parcial de ordem n** é dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (2)$$

Se a sucessão das somas parciais S_n converge para S , então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge**. O limite S é chamado **soma da série**.

Se (S_n) **diverge**, então a série **diverge**.

Exemplo 3. A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

tem as seguintes somas parciais

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

...

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$ a série dada converge e a sua soma é $S = 1$.

A série dada no exemplo anterior é uma **série geométrica**. Em geral, a série dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot r^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots, \quad a \neq 0 \quad (3)$$

é a **série geométrica** de razão r .

A razão da série é calculada como o quociente entre dois termos consecutivos, isto é, $r = \frac{a^{n+1}}{a^n}$.

Teorema 1 *A série geométrica de razão r diverge se $|r| \geq 1$.*

Se $0 < |r| < 1$, então a série converge para a soma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot r^n = \frac{a}{1-r}, \quad 0 < |r| < 1$$

Exemplo 4. A série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n}$ é uma série convergente pois a sua razão é $|r| = \left| \frac{1}{3} \right| < 1$.

Exercício 1. Indique se as séries geométricas seguintes são convergentes ou divergentes:

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{2^n} \quad b) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

Propriedades: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, e $c \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{N}, p \neq q$ então:

$$1. \sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$$1.1. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n \text{ converge.}$$

$$1.2. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n \text{ converge ou diverge.}$$

$$2. \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

$$2.1. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ convergem} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) \text{ converge.}$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ divergentes} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) \text{ converge ou diverge.}$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge, } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) \text{ diverge.}$$

$$2.4. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge, } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) \text{ diverge.}$$

$$3. \sum_{n=p}^{+\infty} a_n \text{ converge [diverge]} \Rightarrow \sum_{n=q}^{+\infty} a_n \text{ converge [diverge]} .$$

Exemplo 5. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{4}{3} \right)^n + 2^{-n} \right]$ é divergente pois é soma de uma série divergente com uma série convergente:

Temos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{4}{3} \right)^n + 2^{-n} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Como

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n$ é uma série divergente pois tem razão $|r| = \left| \frac{4}{3} \right| > 1$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$ é uma série convergente pois tem razão $|r| = \left| \frac{1}{2} \right| < 1$

Pela propriedade 2.4 a série soma diverge.

Teorema 2 *Seja $0 < a_n \leq b_n$ para todo o n .*

1. *Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge*
2. *Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge*

Exemplo 6. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+3^n}$ é convergente pois:

$$a_n = \frac{1}{2+3^n} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n = b_n, \quad n \geq 1$$

Então, atendendo a que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ é uma série geométrica convergente $\left(|r| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1\right)$ e ao teorema anterior a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+3^n}$ é convergente.

Exemplo 7. Use uma série geométrica para escrever a dízima periódica 0.080808... como a razão de dois inteiros.

Solução: Para a dízima periódica 0.080808..., podemos escrever:

$$\begin{aligned} 0.080808... &= \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^4} + \frac{8}{10^6} + \frac{8}{10^8} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8}{10^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^n \end{aligned}$$

Para esta série, temos $a = \frac{8}{10^2}$ e $r = \frac{1}{10^2}$. Assim,

$$0.080808... = \frac{a}{1-r} = \frac{8/10^2}{1-8/10^2} = \frac{8}{99}.$$

Dividindo 8 por 99 numa calculadora podemos constatar o resultado.

2.2.2. Limites em IR

2.2.2.1. Definição e Interpretação Geométrica

Em linguagem corrente, referimos o limite de velocidade, o limite de peso de um lutador, limite de resistência humana, limite da distensão de uma mola. Todas essas expressões sugerem que o limite é uma cota, que em certas ocasiões pode não ser atingida, mas noutras pode ser atingida ou mesmo ultrapassada.

O conceito de “limite matemático” é bastante semelhante ao conceito de limite que referimos anteriormente.

Suponhamos que nos é pedido para esboçar o gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

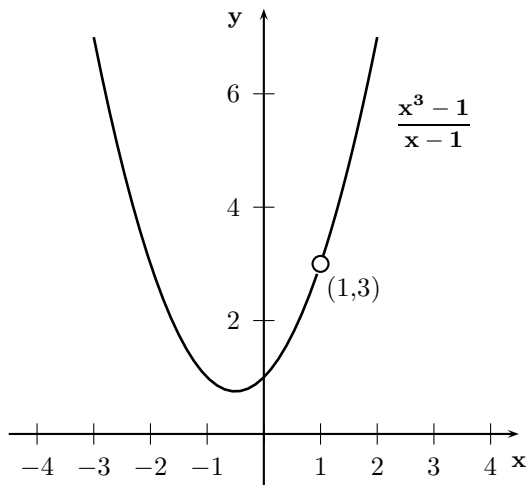
Para todos os valores excepto $x = 1$, podemos utilizar técnicas conhecidas para traçarmos gráficos de funções. No entanto, em $x = 1$, não é claro o que acontecerá. Para termos uma ideia do gráfico de f nas proximidades de $x = 1$, podemos usar dois conjuntos de valores de x - um conjunto que se aproxime de 1 pela esquerda e outro que se aproxime de 1 pela direita.

A tabela seguinte apresenta os valores de $f(x)$ para diversos valores

de x próximos de 1.

x aproxima-se de 1 pela esquerda					x aproxima-se de 1 pela direita				
x	0,75	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1	1,25
$f(x)$	2,313	2,710	2,970	2,997	?	3,003	3,030	3,310	3,813
$f(x)$ aproxima-se de 3					$f(x)$ aproxima-se de 3				

Graficamente temos



Como podemos observar, o gráfico de f é uma parábola que tem uma “falha” no ponto $(1, 3)$. Embora $x = 1$ não pertença ao domínio de f , podemos verificar que $f(x)$ se aproxima de 3 quando x se aproxima de 1. Usando a noção de limite podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

que se lê “o limite de $f(x)$, quando x tende para 1, é 3”.

Informalmente, podemos definir limite:

Se $f(x)$ se aproxima de um único número L conforme x se aproxima de c , pela direita e pela esquerda, o limite de $f(x)$, quando x tende para c , é L . Este limite é escrito como

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad (4)$$

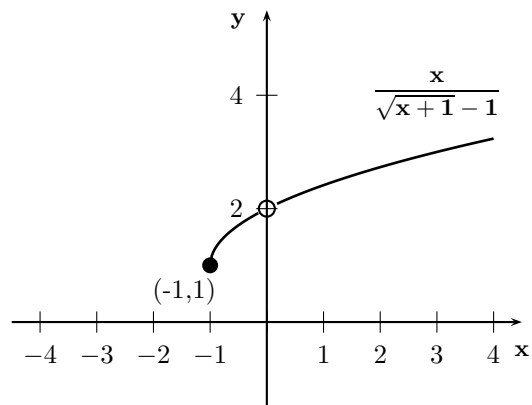
Exemplo 1. Calcule o valor da função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ em diversos pontos na proximidade de $x = 0$ e use os resultados para fazer uma estimativa do limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

Resolução: A tabela seguinte apresenta os valores de $f(x)$ para diversos valores de x próximos de 0.

x aproxima-se de 0					x aproxima-se de 0		
pela esquerda					pela direita		
x	-0,01	-0,001	-0,0001	0	0,0001	0,001	0,01
$f(x)$	1,99499	1,99950	1,99995	?	2,00005	2,00050	2,00499
$f(x)$ aproxima-se de 2					$f(x)$ aproxima-se de 2		

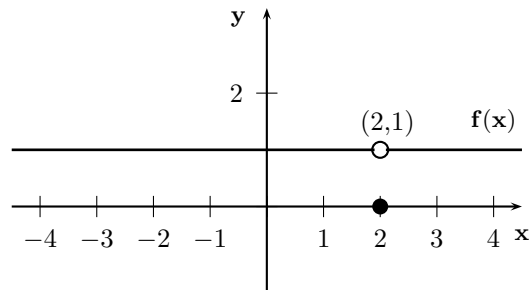
A partir dos resultados apresentados na tabela podemos fazer uma estimativa de que o valor do limite é 2. O gráfico de f reforça este resultado.



Exemplo 2. Calcule o limite de $f(x)$ quando x se tende para 2 sendo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

Resolução: Como $f(x) = 1$ para qualquer que seja $x \neq 1$ podemos concluir que o limite é 1, como podemos verificar graficamente.



Assim podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

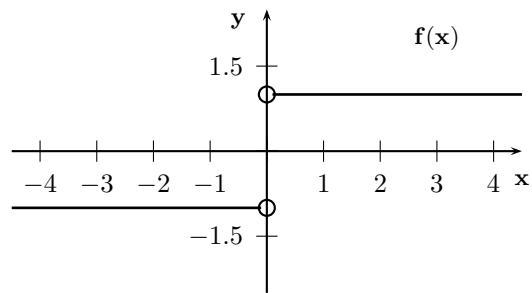
O facto de $f(2) = 0$ não tem relação com a existência ou valor do limite quando $x \longrightarrow 2$. Por exemplo se a função fosse definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

teríamos da mesma forma $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.

Até agora apenas analisámos funções para as quais calculámos limites que existiam. Vejamos o que se passa nos exemplos seguintes.

Exemplo 3. Consideremos o gráfico da função $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

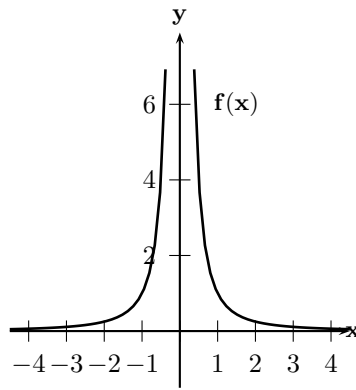


A partir da figura podemos observar que:

$$\bullet \quad x > 0 \implies \frac{|x|}{x} = 1 \qquad \bullet \quad x < 0 \implies \frac{|x|}{x} = -1$$

Isto significa que não importa o quanto perto se chegue de 0. Haverá sempre valores positivos e negativos para x que produzem $f(x) = 1$ e $f(x) = -1$ pelo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ não existe.

Exemplo 4. Consideremos o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.



A partir da figura podemos observar que quando x tende para 0 tanto pelo lado direito como pelo lado esquerdo, o valor de $f(x)$ aumenta sem limites. Isto significa que ao escolhermos x próximo de 0, podemos forçar $f(x)$ a ser tão grande quanto quisermos. Acontece que $f(x)$ não se aproxima de nenhum número real L quando x se aproxima de 0, pelo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ não existe.

Do de que foi dito sai imediatamente que dois tipos comuns de comportamento associados à **não existência de um limite** são:

- $f(x)$ aproxima-se de números diferentes pelo lado direito e pelo lado esquerdo de c . Simbolicamente temos

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

- $f(x)$ aumenta ou diminui ilimitadamente quando x tende para c .

Simbolicamente temos

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty \vee \lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

Definição 2 Chamamos limite lateral à esquerda de $f(x)$, e lê-se “limite de $f(x)$ quando x tende para c por valores inferiores a c ”, ao limite

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \quad (5)$$

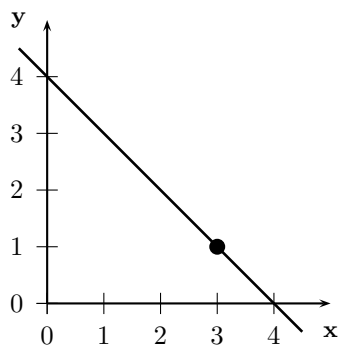
Chamamos limite lateral à direita de $f(x)$, e lê-se “limite de $f(x)$ quando x tende para c por valores superiores a c ”, ao limite

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \quad (6)$$

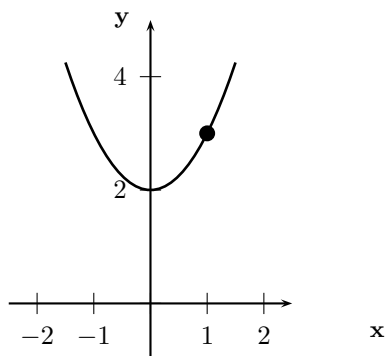
Teorema 3 Se f é uma função e c e L são números reais, então $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ se e só se ambos os limites laterais existem iguais a L .

Exercício 1. Use o gráfico para encontrar o limite (se existir). Se o limite não existir, explique por quê.

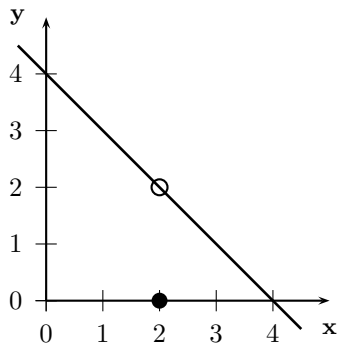
a) $\lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)$



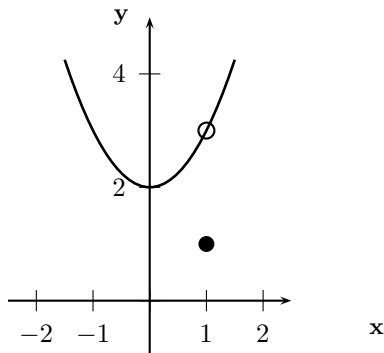
b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)$



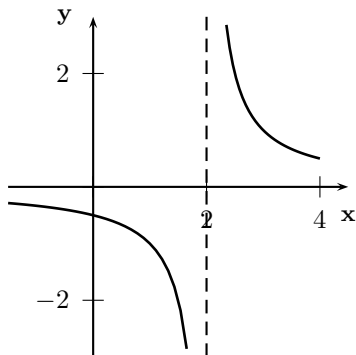
$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$



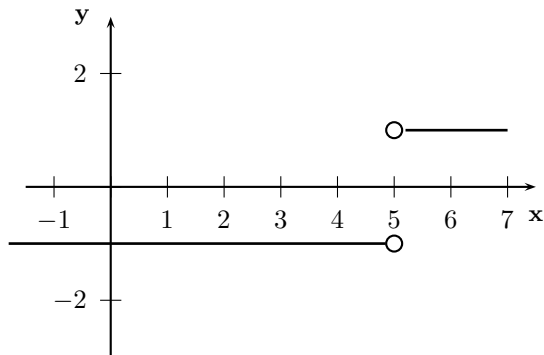
$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 2}$$



$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x - 5|}{x - 5}$$



Exercício 2. Esboce o gráfico de uma função tal que:

- $f(0)$ não está definida
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$
- $f(2) = 6$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

Definição 3 *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo c e seja L um número real. A afirmação*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad (7)$$

significa que para todo o $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \quad (8)$$

2.2.2.2. Propriedades dos limites

Teorema 4 *Sejam b e c números reais, e n um inteiro positivo.*

Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = K$, então:

- $\lim_{x \rightarrow c} b \cdot f(x) = b \cdot L$
- $\lim_{x \rightarrow c} b = b$
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$
- $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = [L]^n$
- $\lim_{x \rightarrow c} x^n = c^n$
- $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$
- $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$
- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot K$
- $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}, \quad K \neq 0$

Na propriedade 7, se n é par, L deve ser positivo. Na propriedade 8, se n é par, c deve ser positivo.

$$\begin{aligned}
\textbf{Exemplo 5.} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 3) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 2x - \lim_{x \rightarrow 2} 3 \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 3 \\
&= 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 5
\end{aligned}$$

Teorema 5 *Se p é uma função polinomial e c é um número real arbitrário, então*

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c) \quad (9)$$

Se r é uma função racional dada por $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ e c é um número real tal que $q(c) \neq 0$, então,

$$\lim_{x \rightarrow c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)} \quad (10)$$

$$\textbf{Exemplo 6.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 2}{1 + 1} = 2$$

Teorema 6 *Se f e g são funções tais que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$, então:*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right) = f(L) \quad (11)$$

Exemplo 7. Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 4$ temos

- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4) = 0^2 + 4 = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(4) = \sqrt{4} = 2$

Os exemplos seguintes mostram algumas técnicas que se podem utilizar para cálculo de limites quando as propriedades e os teoremas anteriores não se podem aplicar.

Exemplo 8. Calcule $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$.

Embora estejamos a trabalhar com o limite de uma função racional, não podemos aplicar o teorema 1 pois o limite do denominador é 0.

$$\begin{array}{ccc} & \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + x - 6) = 0 & \\ & \nearrow & \\ \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} & & \\ & \searrow & \\ & \lim_{x \rightarrow -3} (x + 3) = 0 & \end{array}$$

Como o limite do numerador e do denominador são iguais, têm um factor em comum (neste caso tem de ser obrigatoriamente $x + 3$). As-

sim, para todo o $x \neq -3$, podemos simplificar este factor comum para calcularmos o limite pretendido. Vejamos,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} (x - 2) = -5\end{aligned}$$

Exemplo 9. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

Também neste caso, por substituição directa, obtemos a forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

$$\begin{array}{ccc}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{array}\end{array}$$

Podemos reescrever a fracção racionalizando o numerador. Ora,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Noutros casos, para calcularmos limites, recorreremos aos limites notáveis:

Teorema 7

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \quad p \in IR^+$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \quad p \in IR^+$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+p} = 0, \quad p \in IR^+$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+p)}{\ln x} = 1, \quad p \in IR^+$

Exemplo 10.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\ln(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

Exercício 3. Utilizando as técnicas apropriadas, calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{10}{x-2}(x+8) \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x^2-4} \quad \text{c)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4x+4}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} \quad \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x} \quad \text{f)} \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2}{(x-5)^2}$$

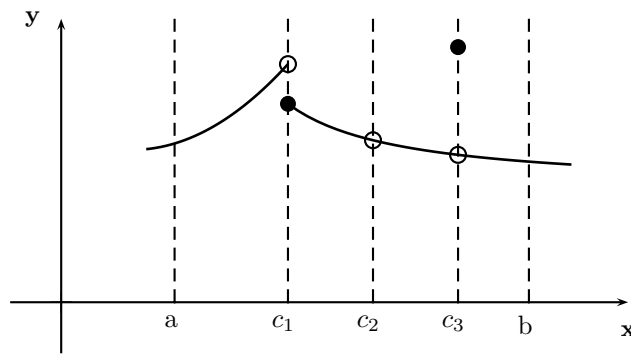
$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^{x+2} - e^2} \quad \text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{2x} \quad \text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+x} - \frac{1}{3}}{x}$$

$$\text{j)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \quad \text{k)} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} \quad \text{l)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x - 8}$$

2.2.3. Continuidade

Matematicamente o termo *contínuo* tem essencialmente o mesmo significado que em linguagem corrente. Dizer que uma função é contínua em $x = c$ significa que não existe interrupção no gráfico de f em c .

Antes de definirmos formalmente o conceito de função contínua consideremos uma função f cujo gráfico se encontra representado na figura seguinte:



Esta figura identifica três valores de x em que a função não é contínua.

- Em $x = c_1$, $\lim_{x \rightarrow c_2} f(x)$ não existe
- Em $x = c_2$, $f(c_2)$ não é definida
- Em $x = c_3$, $f(c_3) \neq \lim_{x \rightarrow c_3} f(x)$

Em todos os outros pontos do intervalo (a, b) , o gráfico de f apresenta-se ininterrupto, o que implica que a função f é contínua em todos os outros pontos de (a, b) .

Definição 4 *Seja $c \in (a, b)$ e f uma função cujo domínio contém o intervalo (a, b) . A função f é contínua no ponto c se se verificam as seguintes condições:*

- $f(c)$ é definida
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Se f é contínua em todos os pontos do intervalo (a, b) , então é contínua no intervalo (a, b) .

Se f é contínua em toda a recta real $(-\infty, +\infty)$, então é contínua em toda a parte.

Exemplo 1. Discuta a continuidade das seguintes funções no ponto $x = c$:

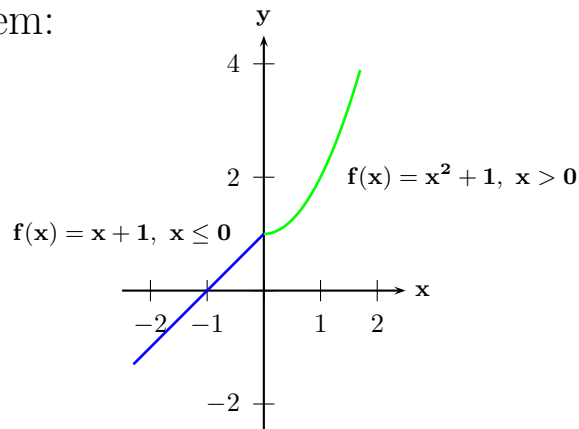
$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases} \quad c = 0$$

Facilmente observamos que $D_f = \mathbb{R}$, no entanto, atendendo à expressão que define a função, o ponto de abcissa $x = 0$ levanta-nos algumas dúvida quanto à continuidade. Analisemos a continuidade da função neste ponto.

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$
- $f(0) = 1$

Logo $f(x)$ é contínua em $x = 0$ pois $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$

Graficamente, vem:



b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad c = 1$

Intuitivamente, uma vez que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, concluímos que $f(x)$ não é contínua em $x = 1$. Vamos provar esta afirmação analítica e graficamente.

Analiticamente, atendendo à definição temos:

- $$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$$

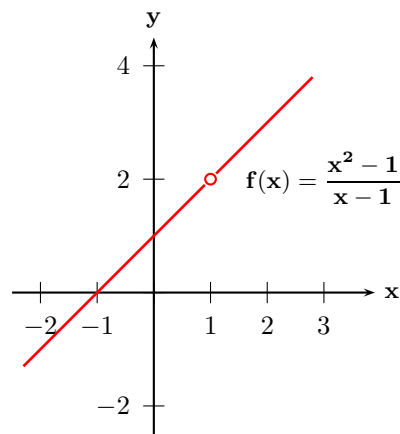
- $$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

- $f(1)$ não está definida

Logo $f(x)$ não é contínua em $x = 1$ pois $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1)$

Graficamente, vem:



Definição 5 *Seja f definida num intervalo fechado $[a, b]$.*

- *f é contínua à direita de $x = a$ se e só se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$*
- *f é contínua à direita de $x = b$ se e só se $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$*
- *f é contínua no intervalo (a, b) se e só se f é contínua em todos os pontos de (a, b)*
- *f é contínua no intervalo $[a, b]$ se e só se f é contínua em todos os pontos de (a, b) , contínua à direita de $x = a$ e contínua à esquerda de $x = b$*
- *f é contínua em $\mathbb{R}$ se e só se é contínua em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$*

Exemplo 2. Discuta a continuidade de $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x < e \\ x - 2, & x \geq e \end{cases}$

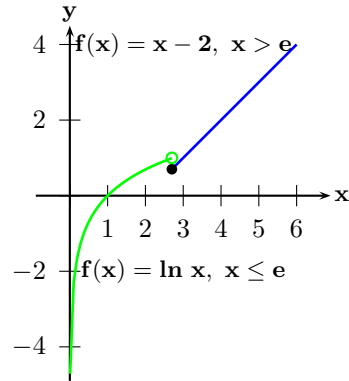
no ponto $x = e$

Vamos averiguar o comportamento de f quando $x = e$.

- $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} (\ln x) = \ln e = 1$
- $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} (x - 2) = e - 2$
- $f(e) = e - 2$

Logo $f(x)$ não é contínua em $x = e$ pois $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$.
 No entanto, atendendo a que $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = f(e)$, a função é contínua à direita de $x = e$.

Graficamente, vem:



2.2.3.1. Propriedades das Funções Contínuas

Teorema 8 *Se $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e f e g são funções contínuas em $x = c$, então*

- *Toda a função constante é contínua.*
- *Toda a função polinomial é contínua.*
- *$b \cdot f$ é uma função contínua.*
- *$f \pm g$ é uma função contínua.*
- *$f \cdot g$ é uma função contínua.*
- *$\frac{f}{g}$ é uma função contínua, se $g(c) \neq 0$.*
- *f^n é uma função contínua.*
- *$\sqrt[n]{f}$ é uma função contínua, excepto no caso de n par e $f(x) < 0$.*

Teorema 9 *Continuidade da Função Composta* Se g é contínua em c e f é contínua em $f(c)$, então a função composta dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é contínua em $x = c$.

Exemplo 3. Discuta a continuidade de $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x < 3 \\ \ln x, & x \geq 3 \end{cases}$

- $x < -1$ $f(x)$ é contínua pois é uma função polinomial
- $-1 < x < 3$ $f(x)$ é contínua pois é uma função polinomial
- $x > 3$ $f(x)$ é contínua pois a função $\ln x$ é contínua no seu domínio $(\mathbb{R}^+)$, logo contínua em $(3, +\infty)$
- $x = -1$
 - $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 1) = -1 - 1 = -2$
 - $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x = 2 \cdot (-1) = -2 = f(-1)$

Logo $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow f(x)$ é contínua em $x = -1$

- $x = 3$

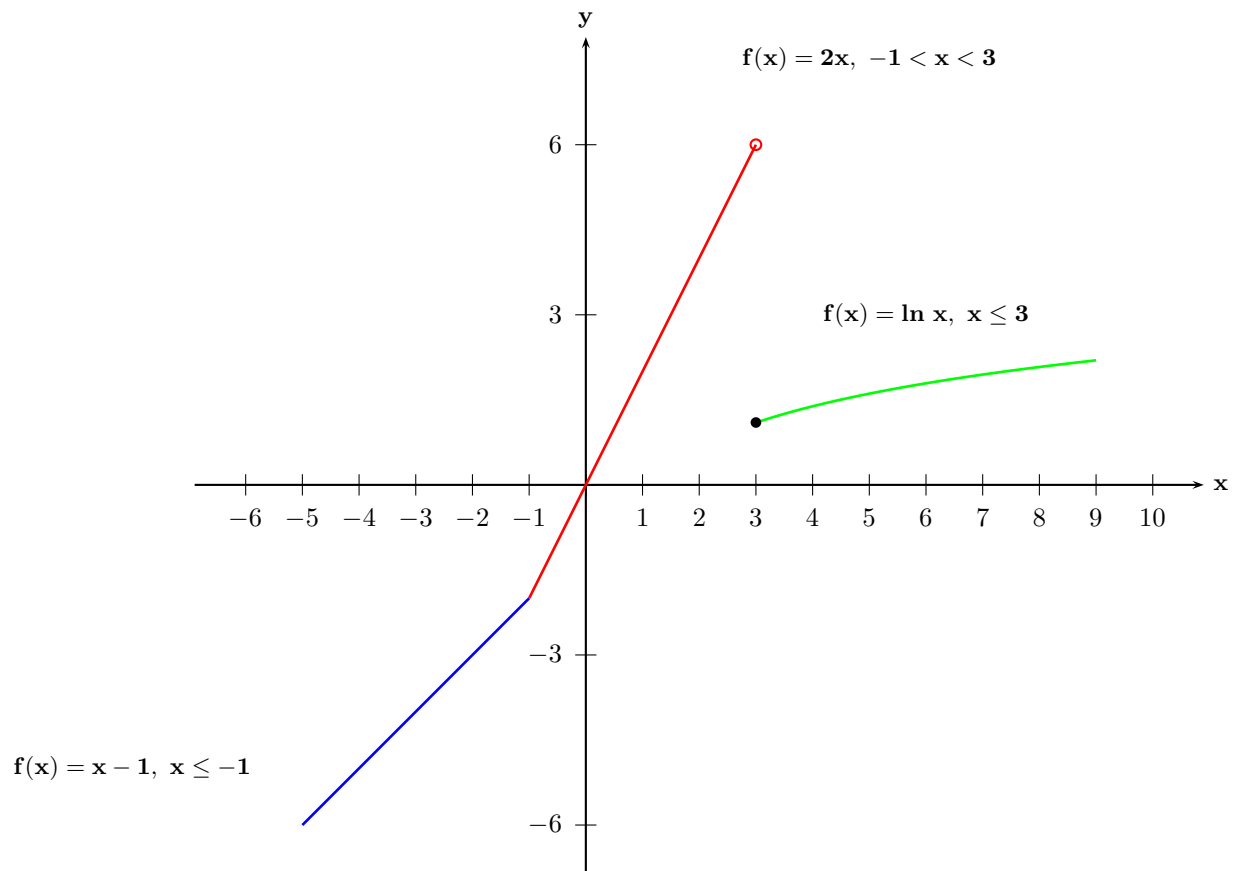
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x = 2 \cdot 3 = 6$

- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln x = \ln 3 = f(3)$

Logo o $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ não existe pelo que $f(x)$ não é contínua em $x = 3$.

Desta forma $f(x)$ não é contínua, no entanto é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Graficamente, vem:



Muitas funções utilizadas em aplicações à gestão são do tipo **função escada**, ou **função degrau**. A função maior inteiro é um exemplo de função escada. Esta função é representada por:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \quad \text{maior inteiro não superior a } x$$

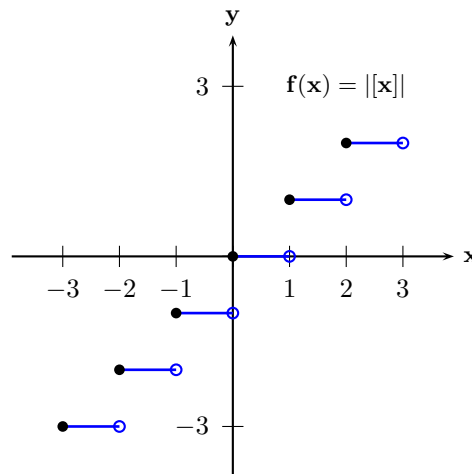
Por exemplo

$$\lfloor -2.1 \rfloor \quad \text{maior inteiro não superior a } -2.1 = -3$$

$$\lfloor -2 \rfloor \quad \text{maior inteiro não superior a } -2 = -2$$

$$\lfloor 1.5 \rfloor \quad \text{maior inteiro não superior a } 1.5 = 1$$

Graficamente podemos observar que o gráfico desta função tem um salto de uma unidade para cada valor inteiro. isto implica que a função não é contínua nos inteiros.



Em aplicações da vida real, o domínio da função de maior inteiro é, de uma forma geral, restrito a valores não negativos de x . Em tais casos, esta função serve para truncar a parte decimal de x .

Exemplo 4.

Os bancos e as instituições financeiras diferem quanto à maneira de creditar os juros numa conta- Se o juro é creditado na conta de modo que o juro futuro seja pago sobre o juro já creditado, então o juro chama-se **composto**. Suponhamos, por exemplo, 10 000 ε numa conta que rende a uma taxa de juro de 6%, composto trimestralmente. Como 6% é a taxa anual de juro, a taxa trimestral é $\frac{1}{4} \cdot 0.006 = 0.15 = 1.5\%$. Seguidamente apresentam-se os saldos da conta nos primeiros 5 trimestres.

Trimestre	Saldo
-----------	-------

1º	10 000.00 ε
----	-------------------------

2º	$10\,000.00 + 0.015 \cdot 10\,000.00 = 10\,150.00 \, \varepsilon$
----	---

3º	$10\,150.00 + 0.015 \cdot 10\,150.00 = 10\,302.25 \, \varepsilon$
----	---

4º	$10\,302.25 + 0.015 \cdot 10\,302.25 = 10\,456.78 \, \varepsilon$
----	---

5º	$10\,456.78 + 0.015 \cdot 10\,456.78 = 10\,613.63 \, \varepsilon$
----	---

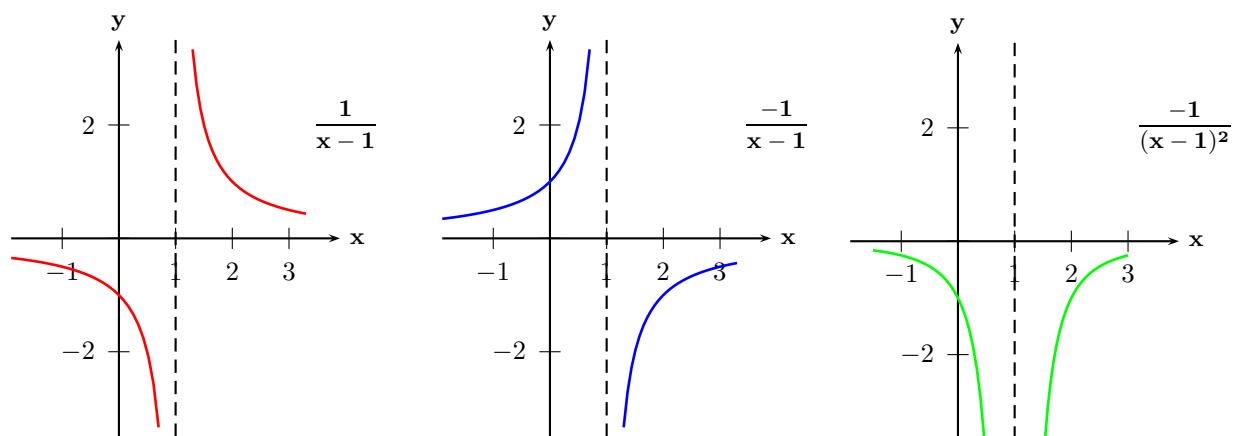
Os cálculos efectuados permitem-nos definir uma função que relaciona o saldo da conta com o tempo em anos.

Seja S o saldo na conta e t o tempo em anos, então

$$S = 10\,000 \cdot (1 + 0.15)^{[4t]}$$

2.2.3.2. Assíntotas

Consideremos os gráficos seguintes:



Se fosse possível estender os gráficos anteriores em direcção ao infinito positivo e negativo, veríamos que cada gráfico torna-se arbitrariamente próximo da recta vertical $x = 1$. Essa recta é uma assíntota vertical do gráfico de f .

Definição 6 A recta $x = c$ é uma assíntota vertical da função $f(x)$ se e só se

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty \quad (12)$$

Exemplo 5. Determine, se existirem as assíntotas ao gráfico da função

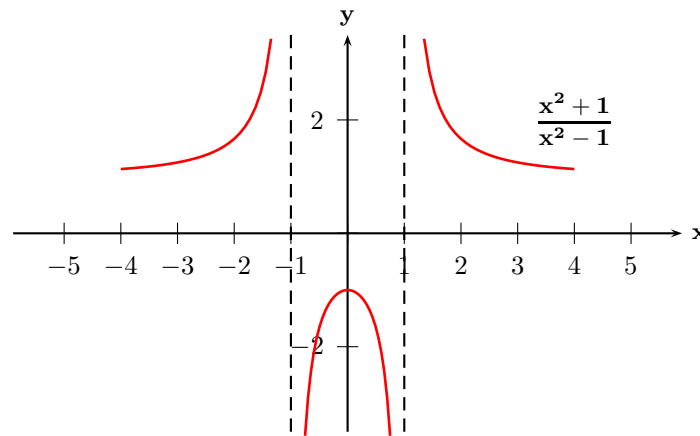
$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

Atendendo a que

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

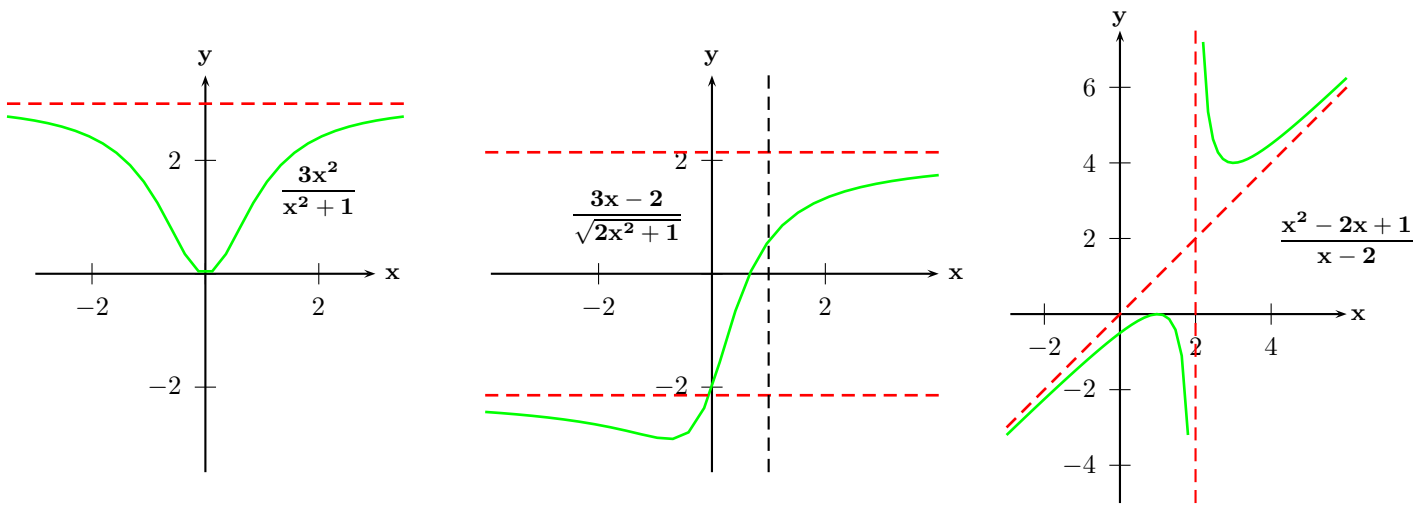
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$f(x)$ tem duas assíntotas verticais: $x = -1$ e $x = 1$. Podemos comprovar este facto pela análise do gráfico de $f(x)$.



Como pudemos observar, o gráfico duma função tem uma assíntota vertical $x = c$, quando x tendendo para c , pela esquerda ou pela direita, torna a função infinita.

Outro tipo de assíntota é obtido quando consideramos x a tender para $+\infty$ ou $-\infty$. Vejamos os seguintes gráficos:



No 1º e 2º casos, o gráfico da função, quando x cresce ou diminui ilimitadamente, aproxima-se de rectas horizontais, enquanto que no 3º caso o gráfico da função é limitado por uma recta oblíqua.

Estas rectas designam-se assíntotas horizontais e assíntotas oblíquas.

Definição 7 A recta $y = mx + b$ é uma **assíntota à direita** da função $f(x)$ se e só se $(a, +\infty) \subset D_f$ e existem finitos os limites

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m \cdot x) \quad (13)$$

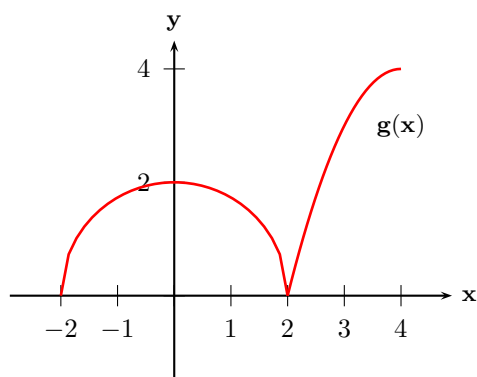
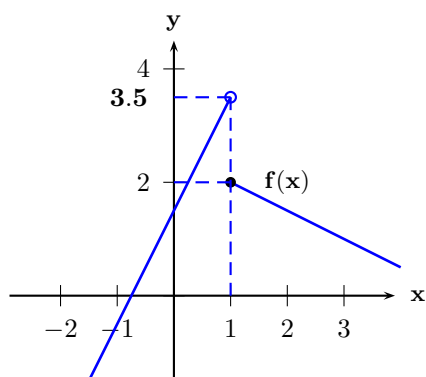
A recta $y = mx + b$ é uma **assíntota à esquerda** da função $f(x)$ se e só se $(-\infty, a) \subset D_f$ e existem finitos os limites

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m \cdot x) \quad (14)$$

Se $m = 0$ a assíntota é horizontal. Se $m \neq 0$ a assíntota é oblíqua.

2.2.3.3. Teoremas de Weierstrass e Bolzano

Consideremos os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$:



Teorema 10 *Teorema de Weierstrass*

$f(x)$ contínua em $[a, b]$ então tem nesse intervalo um máximo e um mínimo.

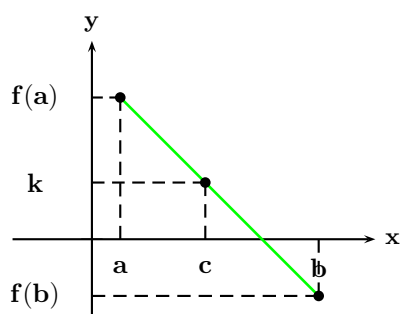
Simbolicamente

- $f(x)$ contínua em $[a, b]$

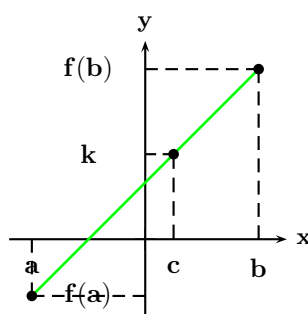
Então

$f(x)$ tem máximo e mínimo em $[a, b]$

Outro teorema importante para funções contínuas é o Teorema de Bolzano mas, antes de o enunciarmos, analisemos os seguintes gráficos:



$$f(a) > k > f(b)$$



$$f(a) < k < f(b)$$

Teorema 11 *Teorema de Bolzano*

$f(x)$ contínua em $[a, b]$ então não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.

Simbolicamente

- $f(x)$ contínua em $[a, b]$
- $f(a) < k < f(b) \vee f(a) > k > f(b)$

Então

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = k$$

Corolário

- $f(x)$ contínua em $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

Então

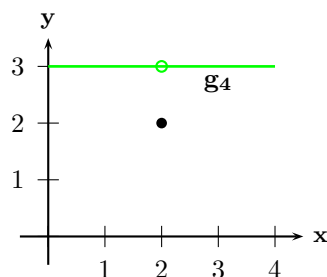
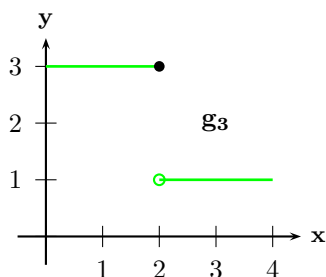
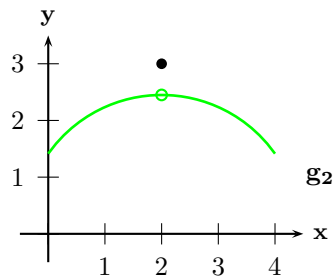
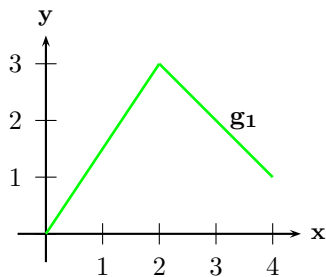
$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$$

Exercício 1. Considere a função $f(x) = \frac{4x + 16}{x^2}$. Justifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- $\exists c \in (-5, -3) : f(c) = 0$
- $\exists c \in (2, 8) : f(c) = 2$

Exercício 2. Considere os seguintes gráficos das funções g_1 , g_2 , g_3

e g_4 .



Para cada condição dada para a função f , qual dos gráficos poderia ser o gráfico de f ?

2.1 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

2.3 f é contínua em 2

2.3 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$

2.2.4. Exercícios

1. Calcule os seguintes limites de sucessões:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n+1} \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{4^n}$$

2. Indique a natureza das seguintes séries:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2} \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} 3 \left(\frac{3}{2} \right)^n \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 1}{2^{n+1}} \quad d) \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot (-1.03)^n \quad e) \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot (-0.6)^n$$

3. Calcule, se possível, a soma das seguintes séries:

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(-2)^n} \quad b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \quad c) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n} - \frac{8}{3^n} \right) \\ d) \sum_{n=1}^{+\infty} [(0.7)^n + (0.9)^n] \quad e) \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^n \quad f) 1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots$$

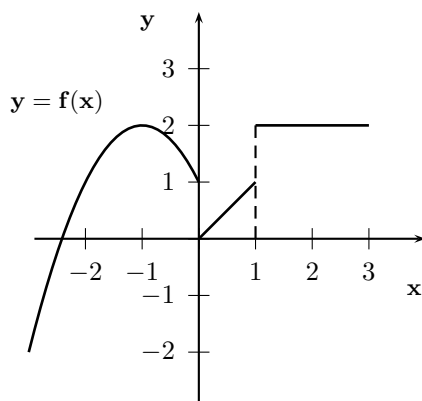
4. Escreva as dízimas periódicas seguintes como série geométrica e escreva a sua soma como a razão de dois inteiros:

$$a) 0.4444 \quad b) 0.9999 \quad c) 0.818181 \quad d) 0.0757575 \quad e) 0.215215215$$

5. Descreva a diferença entre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 5$

6. Um fabricante de jogos electrónicos produziu um novo produto cuja venda anual estimou que seria de 8 000 unidades. A cada ano 10% das unidades vendidas tornam-se inoperantes. Assim, 8 000 unidades estarão em uso depois de 1 ano, $[8\,000 + 0.9(8\,000)]$ estarão em uso após dois anos, e assim sucessivamente. Quantas unidades estarão em uso após n anos?

7. A figura representa o gráfico da função f .



Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad (d) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad (e) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

8. Determine, caso existam, os seguintes limites :

$$\begin{array}{llll}
 (a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} + e^{-x^2} & (b) \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{x+4} & (c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4x+4} & (d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} \\
 (e) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)-2x}{h} & (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} + \ln(x) & (g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \\
 (i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} & (j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\ln|x|} & (k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x^4}-1}{x} & (l) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)}{x}
 \end{array}$$

9. Considere a função f definida por:

$$f(s) = \begin{cases} s^2 - 1 & \text{se } s > 1 \\ 3 & \text{se } s = 1 \\ \frac{1}{s} & \text{se } s < 1 \end{cases}$$

Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{s \rightarrow 1} f(s) \quad (b) \lim_{s \rightarrow 0} f(s) \quad (c) \lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) \quad (d) \lim_{s \rightarrow -\infty} f(s) \quad (e) \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s-1}$$

10. Um negócio tem custo de $C = 0,5x + 500$ para produzir x unidades.

Sabendo que o custo médio por unidade é dado por $\overline{C} = \frac{C}{x}$, determine o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{C}$, e interprete o resultado no contexto do problema.

11. Deposita-se uma quantia de 1000 euros numa conta, a juros compostos trimestralmente à taxa anual r (em forma decimal).

O saldo S após 10 anos é dado por $S = 1000 \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{40}$.

Calcule, caso exista, o saldo quando a taxa de juro tende para 6%.

12. Determine o domínio de continuidade das seguintes funções:

$$\begin{array}{llll}
 (a) f(x) = \frac{x^2-16}{x-4} & (b) g(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x < 0 \\ x-1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} & (c) h(x) = e^x+x & (d) i(x) = \frac{|4-x|}{x-4}
 \end{array}$$

13. Estude a continuidade, em $x = 0$ da função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x+1}{\ln(x+1)} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{3x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

14. Para um certo valor de $k \geq 0$, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x+k) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

15. O custo C (em milhares de euros) da remoção de x por cento dos poluentes emitidos pela chaminé de uma fábrica pode ser modelado por $C(x) = \frac{2x}{100-x}$.

(a) Explique qual o domínio de C .

(b) Faça o gráfico da função custo. A função é contínua em todo o seu domínio? Justifique.

(c) Determine o custo da remoção de 75% dos poluentes da chaminé.

16. Sabendo que, uma função f é contínua no intervalo $[1, 3]$ e $f(1) = 7$ e $f(3) = 4$.

Qual das seguintes afirmações é **necessariamente** verdadeira?

(a) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1, 3]$.

(b) A função f não tem zeros no intervalo $[1, 3]$.

(c) A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 3]$.

(d) A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo $[1, 3]$.

17. De uma função g , contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

. 1 é zero de g

. $g(3) > 0$

Prove que $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos uma solução no intervalo $]1, 3[$.

18. De uma função g de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a bissetriz dos quadrantes ímpares é uma assíntota do seu gráfico. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

Prove que o eixo Ox é uma assíntota do gráfico de h .

19. De uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que:

. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x)}{x} = 1$

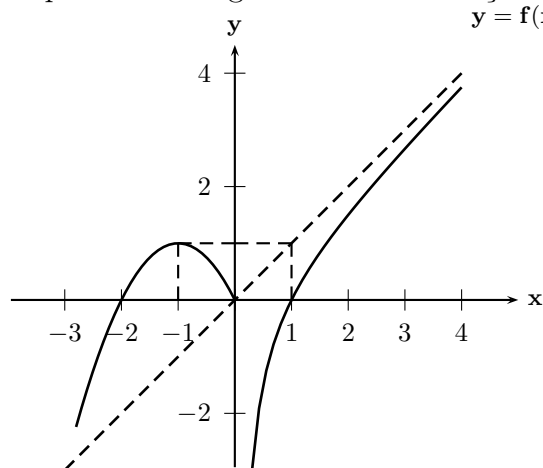
. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2f(x) - x = 3$

Determine, caso exista, a equação da assíntota oblíqua de f .

20. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{4x}{|x-2|}$

- (a) Escreva a expressão de f sem utilizar o símbolo de modulo.
- (b) Indique as assíntotas do gráfico de f .

21. Na figura seguinte está representado o gráfico de uma função r.v.r., $y = f(x)$:



- (a) Mostre que para $x \in IR_0^-$, $f(x) = -(x+1)^2 + 1$.
- (b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e conclua qual o valor $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

Sugestão: Note que $y = x$ é assíntota não vertical da função.

- (c) Seja

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < 0 \\ e^x + b & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- i. Determine o valor de b de modo que g seja contínua em $x = 0$.
- ii. Faça $b = -1$ e considere $g(x)$, $x \geq 0$.

A. Resolva a seguinte equação: $g(5x+1) - g(2x+3) = 0$.

B. Caracterize a função inversa de g .

22. Uma chamada telefónica interurbana custa 1.04€ para os dois primeiros minutos e 0.36€ por cada minuto adicional ou fracção correspondente.

- (a) Estabeleça uma função que relacione o custo da chamada em função do tempo t (em minutos).
- (b) Esboce o gráfico dessa função e discuta a sua continuidade.