CAP. 5 – DETERMINANTES

5.1 DEFINIÇÕES

DETERMINANTE DE ORDEM 2

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 2 é por definição a aplicação:

$$\det : M_{2\times 2}(IK) \to IK$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \to \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

EXEMPLO

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5 - 2\times 3 = -1$$

DETERMINANTE DE ORDEM 3

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem 3 é por definição a aplicação:

$$\det : M_{3\times 3}(IK) \quad \to \quad IK$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \to \quad \det(A)$$

em que $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$$= +\,a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13})$$

onde A_{1j} é a matriz de ordem 2 que se obtém eliminando a linha 1 e a coluna j, $j = 1, 2, 3$

EXEMPLO

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1-8) + 2(-2) + 3(-1) = -7 - 4 - 3 = -14$$

DETERMINANTE DE ORDEM N

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem n é por definição a aplicação

$$\begin{aligned} \det : M_{n\times n}(IK) &\rightarrow \quad IK \\ A &\rightarrow \det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det(A_{1n}) \end{aligned}$$

onde A_{ij} é a matriz obtida de A por eliminação da linha i e coluna j.

EXEMPLO

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1\times 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1\times 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\times 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(4-0) - (3-2) - (0-1) = -4 - 1 + 1 = -4$$

PROPRIEDADES

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem $\boldsymbol{n}$.

1) O determinante de uma matriz triangular (inferior ou superior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

2) $\det(A) = \det(A^T)$.

3) Se A tiver uma linha ou coluna nula, então $\det(A) = 0$.

4) Se A tem duas linhas (ou colunas) iguais, então $\det(A) = 0$.

5) O determinante de A não se altera quando se adiciona a uma linha (ou coluna) de A uma combinação linear das outras linhas (ou colunas).

6) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

7) Se B é uma matriz obtida de A por meio de troca de duas linhas (ou duas colunas) entre si, então $\det(B) = -\det(A)$.

8) Seja $A = [A_1 \ \ldots \ A_j + B_j \ \ldots \ A_n]$ uma representação de A indicando as suas colunas. Então:

$$\det(A) = \det([A_1 \ \ldots \ A_j \ \ldots \ A_n]) + \det([A_1 \ \ldots \ B_j \ \ldots \ A_n])$$

A mesma propriedade aplica-se às linhas.

9) Seja $A = [A_1 \ \ldots \ \alpha A_j \ \ldots \ A_n]$ uma representação de A indicando as suas colunas. Então:

$$\det(A) = \alpha \det([A_1 \ \ldots \ A_j \ \ldots \ A_n])$$

A mesma propriedade aplica-se às linhas.

10) As linhas (ou colunas) de uma matriz A são linearmente dependentes se e só se $\det(A) = 0$. Logo,

$$A \text{ invertível} \Leftrightarrow A \text{ é não singular} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

11) Se A é invertível então $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

NOTA

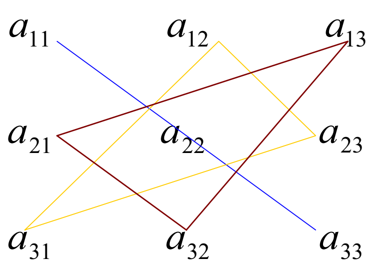
Em geral:

- $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
- $\det(\alpha A) \neq \alpha \det(A)$. De facto, $\boxed{\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)}$

5.2 TÉCNICAS PARA O CÁLCULO DE DETERMINANTES

REGRA DE SARRUS (só para matrizes de ordem 3)

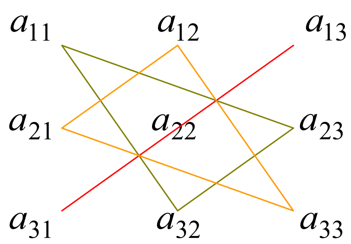
Os "termos positivos" de uma matriz A de ordem 3 obtêm-se do produto dos elementos da diagonal principal e dos produtos dos vértices dos triângulos que têm um dos lados paralelo à diagonal principal:



Assim, os "termos positivos" são:

$$a_{11}a_{22}a_{33}, \quad a_{12}a_{23}a_{31}, \quad a_{21}a_{13}a_{32}$$

Os "termos negativos" da matriz A obtêm-se multiplicando os elementos da diagonal secundária e multiplicando os vértices dos triângulos que têm um dos lados paralelo à diagonal secundária:



Assim, os "termos negativos" são:

$$a_{13}a_{22}a_{31}, \quad a_{21}a_{12}a_{33}, \quad a_{11}a_{23}a_{32}$$

Então:

$$\det(A) = +\, a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

EXEMPLO

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +\underbrace{2\times 0\times 1}_{0} + \underbrace{1\times 1\times 1}_{1} + \underbrace{(-1)\times 2\times(-1)}_{2} - \underbrace{2\times 0\times 1}_{0} - \underbrace{(-1)\times 1\times 1}_{-1} - \underbrace{2\times 1\times(-1)}_{-2}$$

$$= +0 + 1 + 2 - 0 + 1 + 2 = 6$$

Eliminação de Gauss

Consiste em transformar uma matriz quadrada de ordem n numa matriz triangular aplicando algumas das propriedades enunciadas anteriormente.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} -\begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \underset{L_3 - 4L_1}{=}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} \underset{L_3 + \frac{3}{2}L_2}{=} -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 1$$

Fórmula de Laplace

Na definição, o determinante é calculado usando o desenvolvimento segundo a primeira linha. Este, no entanto, pode ser calculado usando o desenvolvimento segundo qualquer linha i ou qualquer coluna j do seguinte modo:

Fórmula de Laplace segundo a linha *i*

$$\det(A) = a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}\det(A_{i2}) + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}\det(A_{in}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Fórmula de Laplace segundo a coluna *j*

$$\det(A) = a_{1j}(-1)^{1+j}\det(A_{1j}) + a_{2j}(-1)^{2+j}\det(A_{2j}) + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}\det(A_{nj}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

onde A_{ij} é a matriz de ordem $n-1$ obtida de A por eliminação da linha i e da coluna j.

Chama-se a A_{ij} o **menor-*ij*** da matriz A e chama-se a $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ o **cofactor-*ij*** ou **complemento algébrico** *ij* de A.

Os sinais $(-1)^{i+j}$ podem ser obtidos da seguinte matriz de sinais: $\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO

Calcule $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ usando a fórmula de Laplace, desenvolvendo segundo a 3ª coluna.

5.3 APLICAÇÕES DOS DETERMINANTES

CÁLCULO DA INVERSA

Dada uma matriz A de ordem n, chama-se **matriz adjunta de *A***, e denota-se por **adj *A***, à matriz de ordem n

$$\textbf{adj } A = \left[(-1)^{i+j}\det A_{ij}\right]$$

onde A_{ij} é o menor-*ij* da matriz A, ou seja, os elementos de adj A são os complementos algébricos de A.

Se A for invertível, $\det(A) \neq 0$ e a inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \frac{(\text{adj } A)^T}{\det A} = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)^T$$

EXEMPLO $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$ $\det(A)=-2$

$$\det(A_{11})=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1 \qquad \det(A_{12})=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1 \qquad \det(A_{13})=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-2$$

$$\det(A_{21})=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=0 \qquad \det(A_{22})=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4 \qquad \det(A_{23})=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=2$$

$$\det(A_{31})=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad \det(A_{32})=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3 \qquad \det(A_{33})=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2$$

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix}+\det(A_{11}) & -\det(A_{12}) & +\det(A_{13})\\ -\det(A_{21}) & +\det(A_{22}) & -\det(A_{23})\\ +\det(A_{31}) & -\det(A_{32}) & +\det(A_{33})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & -4 & -2\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & -4 & -2\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}^T=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & 3\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 2 & -3/2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

REGRA DE CRAMER

Seja A uma matriz não singular, isto é, $\text{car}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

A solução do sistema de equações lineares $Ax = b$, com $x=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}^T$, é dada por

$$x_j=\frac{\det C_j}{\det A}$$

onde C_j é a matriz que se obtém de A substituindo a coluna j de A pela coluna b.

EXEMPLO

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

det(A) $= -6 \neq 0 \Rightarrow A$ é não singular

A solução do sistema é:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1,\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-12}{-6} = 2,\ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$