Departamento: Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Curso: Engenharia Electrotécnica

Ano: 1º **Semestre:** 1º

Prova: Exame

Ano Lectivo: 2007/2008

Época: Normal

Data: 21/01/2008

Duração: 2h30m

Sem Consulta

---

1. Seja A uma matriz invertível, cuja inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Sem determinar A, calcule a matriz B de modo que $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Indique, justificando, o valor da característica de A.

(c) Que pode dizer acerca do número de soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$?

(d) Determine uma matriz C, por forma que $A^{-1} + C$ seja hermítica.

2. Seja A a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Considere o sistema $Ax = b$ com $b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$. Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β.

(b) Indique, justificando, para que valores de α e β a matriz A tem inversa.

(c) Faça $\alpha = 1$ e $\beta = 1$.

i. Calcule $det\left[2A^3\left(A^T\right)^{-1}\right]$, usando propriedades dos determinantes.

ii. Determine a inversa da matriz B que se obtém de A eliminando a quarta linha e a quarta coluna.

3. Indique, justificando, o valor de verdade das seguintes proposições.

(a) Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 3 \text{ e } x \text{ não excede } 9\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é inferior a } 6\}$ então $(A \cap B) \times (A - B) = \{(3,6), (3,9)\}$.

(b) O conjunto $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & i \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{C} \right\}$ é um subespaço vectorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

(c) A base $\{f, g, h\}$ de um subespaço de $C[-1, 1]$, com $f(x) = 1$, $g(x) = x$ e $h(x) = x^2$, é uma base ortogonal.

v.s.f.f.

Disciplina: Álgebra Linear e Geometria Analítica **Data:** 21/01/2008

Prova: Exame **Época:** Normal

4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear cuja matriz em relação à base $B = \{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base $C = \{(-1,0),(0,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é

$$M(f;B,C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que B é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Verifique que $f(x,y,z) = (-2y+z, -x+y)$.

(c) Considere a aplicação $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ tal que $g(x,y) = (x+2y, 0, x-y)$.

i. Mostre que g é uma aplicação linear.

ii. Determine a matriz da aplicação g em relação às bases C e B.

5. Seja A uma matriz 3×3 cujos espaços próprios são

$$E(0) = \{(x,y,z) : x = y = 0\} \qquad \text{e} \qquad E(1) = \{(x,y,z) : x + y - z = 0\}.$$

(a) Para cada espaço próprio determine uma base e a sua dimensão.

(b) Indique, justificando, o espaço nulo de A e a nulidade de A.

(c) Determine o polinómio característico de A.

(d) Mostre que existe uma matriz diagonal D semelhante com A.

(e) Determine uma matriz diagonal D e uma matriz invertível S tais que $A = SDS^{-1}$.

6. Em $\mathbb{R}^3$, considere os vectores $u = (1,-1,0)$, $v = (1,1,1)$ e $w = (-3,1,2)$, o ponto $A = (2,-1,6)$ e o plano $\pi : x + y + z = 0$.

(a) Use o método de ortogonalização de *Gram-Schmidt* para determinar uma base ortonormada do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores u, v e w.

(b) Determine um vector unitário simultaneamente perpendicular a u e a w.

(c) Calcule o volume do paralelepípedo definido por u, v e w.

(d) Use um determinante adequado para obter a equação geral do plano que contém o ponto A e é definido por u e v.

(e) Determine a posição relativa do plano da alínea anterior e do plano π.

FIM