Departamento: Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Curso: Engenharia Electrotécnica

Ano: 1º **Semestre:** 1º

Prova: Exame

Ano Lectivo: 2007/2008

Época: Recurso

Data: 08/02/2008

Duração: 2h30m

Sem Consulta

---

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$.

(a) Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $det(A) = -2$, e apresente as soluções na forma exponencial.

(b) Considere $\alpha = 1$ e $B, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Sabendo que $\left(A^T\right)^{-1} = C^{-1}BC$, calcule $det(B)$.

2. Considere o sistema $Ax = b$ que depende dos parâmetros reais α, β e γ, e que após a aplicação do processo de eliminação de *Gauss* na matriz ampliada $[A|b]$ obtém-se:

$$[U|c] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \alpha & 2\beta & 2\alpha + 2\gamma + 2 \\ 0 & 2\alpha & 0 & 4\alpha \\ 0 & 0 & -4\beta & -4\gamma \end{array}\right].$$

(a) Discuta o sistema em função dos parâmetros reais α, β e γ.

(b) Sabendo que $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

i. Indique as operações elementares utilizadas na eliminação de *Gauss*.

ii. Decomponha a matriz L num produto de matrizes elementares.

iii. Utilizando a alínea anterior, verifique que $L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Faça $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = 1$.

i. Calcule a inversa da matriz U.

ii. Use as matrizes L^{-1} e U^{-1} para obter a matriz A^{-1}.

iii. Resolva o sistema $Ax = b$, usando as alíneas anteriores.

3. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

(a) Se A é uma matriz hermítica, então iA é uma matriz anti-hermítica.

(b) A aplicação $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(A) = det(A)$ é uma aplicação linear.

(c) Se $car(A) = n = 3$, então a base de $N(A) = \{(0, 0, 0)\}$.

v.s.f.f.

4. Seja $f : I\!R^3 \longrightarrow M_{2\times 2}(I\!R)$ uma aplicação linear definida por

$$f(0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f(0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad f(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que $f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y-z \\ 2y & x \end{bmatrix}$.

(b) Mostre que a matriz da aplicação f relativamente à base $\{(1,0,0),(2,-1,0),(1,1,1)\}$ de $I\!R^3$ e à base canónica de $M_{2\times 2}(I\!R)$ é $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Calcule a imagem $f(3,4,-2)$, usando a matriz da alinea anterior.

(d) Considere o subconjunto $S = Im(f) = \{f(u) : u \in I\!R^3\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y-z \\ 2y & x \end{bmatrix} : x,y,z \in I\!R \right\}$.

i. Mostre que S é um subespaço vectorial de $M_{2\times 2}(I\!R)$.

ii. Determine uma base e a dimensão de S.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e a matriz B de ordem 3 cujo polinómio característico é $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.

(a) Mostre que $(2,2,-2)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 1$.

(b) Calcule os restantes valores próprios de A.

(c) Determine o espaço próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = 1$ e uma base para esse espaço.

(d) Verifique que B é semelhante a alguma matriz diagonal e indique quantas matrizes diagonais semelhantes a B existem.

(e) Calcule $det(B)$ e diga, justificando, se B é invertível.

6. Considere as funções $f(x) = 1$ e $g(x) = e^x$ de $C[0,1]$, e em $I\!R^3$ considere os vectores $u = (0,1,1)$ e $v = (-1,1,0)$ e os pontos $A = (1,0,\alpha)$, $B = (2,-1,2)$ e $C = (1,-1,1)$.

(a) Use o método de ortogonalização de *Gram-Schmidt* para determinar uma base ortogonal do subespaço de $C[0,1]$ gerado por f e g.

(b) Calcule a área do paralelogramo definido pelos vectores u e v.

(c) Determine os valores de α para os quais os vectores:

i. $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são ortogonais;

ii. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e u são complanares.

(d) Obtenha as equações cartesianas da recta BC.

(e) Determine a equação geral do plano π que contém o ponto C e é normal ao vector v.

(f) Estude a posição relativa do plano π e da recta BC.

FIM