

1. O Sr Diogo das Contas é um contabilista com reputação. Dos últimos 20 clientes a quem ele tratou dos impostos, 10 foram sujeitos a uma auditoria e, portanto, o Sr. Diogo está desconfiado que há uma “perseguição” ao seu trabalho. Sabendo que apenas 5% dos contribuintes são sujeitos a uma auditoria, diga se a desconfiança do Sr. Diogo das Contas é razoável.

2. O Luís joga o seguinte jogo: escolhe, ao acaso, um número de 1 a 6 e em seguida lança 3 vezes um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Se o número escolhido pelo Luís sai x vezes (num total de 3 lançamentos) ele ganha x euros. Em contrapartida, se o número escolhido pelo Luís nunca ocorre então ele perde 5 euros. Determine o ganho médio do Luís ao jogar este jogo.

3. Qual dos seguintes jogos A ou B, escolheria?

Jogo A: Lançam-se dois dados e recebe-se, em milhares de euros, a soma dos pontos obtidos.

Jogo B: Lançam-se 4 moedas e recebe-se, em centenas de euros, o quádruplo do número de caras obtidas.

4. Um corrector de seguros vende apólices a 5 homens, todos da mesma idade e em boas condições de saúde. De acordo com as tábuas actuariais a probabilidade de que um homem dessa idade esteja vivo daqui a 30 anos é $2/3$. Determine a probabilidade de que daqui a 30 anos:

- os 5 homens estejam vivos;
- pelo menos 3 homens tenham morrido.
- Calcule o nº esperado de homens que estarão vivos daqui a 30 anos e a respectiva variância.

5. Um sistema é constituído por 5 componentes iguais, sendo 0.05 a probabilidade de um elemento falhar ao longo de qualquer dia da semana. No caso de nenhum elemento avariar o sistema funciona normalmente; se um dos elementos avariar o sistema funciona com probabilidade 0.7; se mais de um elemento avariar o sistema não funciona. Calcule:

- a probabilidade do sistema funcionar ao longo do dia.
- a função de probabilidade do nº de falhas registadas nos seus componentes ao longo de um dia, indicando o valor médio de tal distribuição.
- a probabilidade de em 2 dias de um período semanal (5 dias) o sistema registar pelo menos uma falha nos seus componentes.

6. Uma caixa contém 10 bolas, das quais 4 são brancas, 3 pretas e 3 azuis.

- suponha que se retiram da caixa 5 bolas com reposição, diga qual a probabilidade de não haver bolas brancas na amostra.
- Calcule a mesma probabilidade supondo que as bolas foram retiradas sem reposição ou instantaneamente.

7. De um lote de 100 peças, das quais 20 são defeituosas, escolhe-se uma amostra de 10 sem reposição. Qual a probabilidade de nessa amostra:

- haver 3 defeituosas;
- haver 5 defeituosas.

8. Suponha que é gerente de Marketing de uma companhia que faz todo o tipo de trabalhos de canalização. As autoridades sanitárias fizeram um estudo na região e identificaram 200 casas com problemas nas fossas sépticas em 1000 casas existentes nessa região. Você aproveita o facto para fazer uma campanha porta a porta oferecendo os serviços da companhia para reconstruir as fossas sépticas. Se os seus trabalhadores seleccionarem ao acaso 25 casas para fazer a oferta, qual a probabilidade de 3 ou mais dessas casas terem problemas com as fossas sépticas?

9. Oito componentes eléctricos devem ser ligados em série num sistema, de tal modo que a falha de um acarrete a falha de todo o sistema. Dois componentes falharam.

- Qual a probabilidade de a 1ª peça inspeccionada ser uma das que falharam?
- Inspeccionando-se 4 componentes, qual a probabilidade de os dois que falharam estar entre eles?
- Quantos componentes devem ser inspeccionados para que haja pelo menos 70% de probabilidade de encontrar os dois componentes que falharam?

10. Num dado posto de vendas apurou-se que a procura de um certo artigo é uma variável aleatória de Poisson de valor médio igual a 5 unidades diárias. Qual a probabilidade de num dia a procura ser de:

- superior a 5 unidades;
- nula.

11. Suponhamos que os clientes entram num armazém à média de 60 por hora. Usando adequadamente a distribuição de Poisson determine:

- a probabilidade de que num intervalo de 5 minutos não entre ninguém no armazém;
- o intervalo de tempo tal que a probabilidade de que não entre ninguém no armazém durante o dito intervalo seja de 0.5.

12. Suponhamos que os defeitos em fios para tear possam ser aproximados por um processo de Poisson com média de 0,2 defeitos por metro. Inspeccionando-se pedaços de fio de 6 metros de comprimento, determine a probabilidade de se encontrarem menos de 2 defeitos.

13. Num serviço de distribuição de encomendas verifica-se que o número de encomendas deixadas em morada errada é aproximadamente Poisson com $\lambda=4$, por cada funcionário distribuidor e por mês. Os promotores de um novo método de distribuição clamam que λ pode baixar para $\lambda=2$ em cerca de 90% dos distribuidores, ficando apenas cerca de 10% destes funcionários que não conseguem melhorar o serviço com o novo método.

Num certo mês foi seleccionado um distribuidor, que foi submetido ao novo sistema, e verificou-se que havia enviado apenas 1 encomenda para morada errada. Calcule a probabilidade deste funcionário ter de facto sido influenciado pelo novo sistema.

14. Seja X a variável aleatória que representa os lucros obtidos numa empresa. Sabendo que X tem distribuição Qui-Quadrado com 3 graus de liberdade calcule:

- a probabilidade de os lucros obtidos serem no máximo 0.584 .

- b) a probabilidade de os lucros obtidos serem no mínimo de 0.216
 c) a probabilidade de os lucros obtidos estarem entre 0.216 e 0.584

15. Seja T uma variável aleatória com distribuição t de Student com 6 graus de liberdade. Determine o valores de t para o qual:

- a) a área situada à sua direita seja de 0.025 .
 b) a área situada à sua esquerda seja de 0.995 .

16. Considere a variável aleatória X que tem distribuição F de Snedcor com 3 e 5 graus de liberdade. Determine:

- a) o 10º percentil da distribuição de probabilidade de X .
 b) o 90º percentil da distribuição de probabilidade de X .

17. Um combustível para foguetes deve conter uma certa percentagem, X , de um componente especial. As especificações exigem que X esteja entre 30 e 35% . O fabricante do referido combustível obterá, por cada litro, um lucro líquido de 100\$00 se $30 < X < 35$, de 50\$00 se $35 < X < 40$ ou $25 < X < 30$ e um prejuízo de 100\$00 para quaisquer outros valores de X . Supondo que X é uma v. a. com distribuição $N(33,32)$, calcule o lucro líquido esperado por cada litro de combustível.

18. Suponha que as classificações de um exame são normalmente distribuídas com média 76 e desvio padrão 15. As notas são atribuídas por um julgamento comparativo com o aproveitamento de toda a turma. Sabendo que receberam nota A (nota máxima) 15% dos alunos, e que receberam nota F (a pior nota) 10% dos alunos, determine:

- a) a classificação mínima para receber um A;
 b) a classificação mínima para não receber um F.

19. Admite-se que 75% da população de determinada cidade é favorável ao plano A. Qual a probabilidade de numa amostra de 200 pessoas se encontrarem:

- a) no máximo 150 pessoas favoráveis ao plano;
 b) mais de 140 pessoas favoráveis ao plano;
 c) 150 pessoas favoráveis ao plano.

20. Suponha que dispõe de 2 processos para chegar a um determinado local:

- usando o transporte A, em relação ao qual o tempo de deslocação é uma v. a. com distribuição normal de média 0.62 horas e desvio padrão 0.08 horas;
- usando o meio de transporte B, numa parte do percurso, e mudando para o meio de transporte C para completar o percurso. Os tempos de deslocação (em minutos) são também variáveis aleatórias com distribuição normal com os seguintes parâmetros:

	média	variância
B	25	80
C	10	20

Suponha que não há tempo de espera na mudança de transporte.

- Qual o processo a escolher se se considerar importante não demorar mais de 40 minutos?
- E se não se quiser demorar mais de 35 minutos?

21. No dia das eleições presidenciais em certo país, o candidato A tem 30% das preferências. Se durante este dia, considerarmos uma amostra aleatória de 400 eleitores, qual a probabilidade de que, na amostra:

- exactamente 30% preferirem o candidato A?
- a preferência pelo candidato A não exceda 20%?

22. Um avião pode acomodar 300 passageiros, 30 dos quais em 1ª classe e 270 em classe turismo. A companhia aérea reservou 30 lugares em 1ª classe e 300 em turismo. Sabendo que a probabilidade de não comparecimento de quem faz reserva é de 0.15, qual é a probabilidade de que todos os passageiros que comparecem sejam acomodados, se os lugares em 1ª classe puderem ser utilizados pelos passageiros de turismo?

23. O Sr. Bebetudo acabou de sair de uma tasca e dirige-se para sua casa que fica em linha recta à distância de 7 metros:



Suponha que:

- Os passos do Sr. Bebetudo são independentes uns dos outros
- Cada passo que o Sr Bebetudo dá, pode fazê-lo avançar um metro (andou para a frente) ou zero metros (cambaleou e não saiu do mesmo sítio)
- A probabilidade de que um passo dado pelo Sr Bebetudo o faça avançar um metro, isto é, de que o passo seja dado para a frente, é de 0.6

Considere a variável aleatória X_i associada ao passo i do Sr. Bebetudo:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se o passo } i \text{ o fez avançar 1 metro, isto é, o passo } i \text{ foi dado para a frente} \\ 0 & \text{se o passo } i \text{ não o fez avançar, isto é, no passo } i \text{ ele cambaleou} \end{cases}$$

- a) Indique a distribuição de X_i e escreva a sua função de probabilidade.
- b) Em 12 passos dados pelo Sr. Bebetudo qual o número esperado de passos para a frente?
- c) Calcule a probabilidade de o Sr. Bebetudo chegar a casa ao fim de dar 12 passos. Admita que se ele avançar mais de 7 metros passa pela casa sem dar conta.
- d) O que representa a variável aleatória $X=X_1+X_2+ \dots+X_{12}$ e qual a sua distribuição?
- e) Qual deverá ser o número de passos necessários para que o Sr. Bebetudo chegue a casa com probabilidade 0.215.
- f) Suponha que o Sr. Bebetudo ao sair da tasca se engana e caminha em sentido contrário ao da sua casa. Qual a probabilidade de ao fim de 200 passos o Sr. Bebetudo ter avançado pelo menos 100 metros?

24. Numa determinada linha de fabrico, uma máquina enche, em cada dia de laboração, 5000 sacos de açúcar. Sabe-se que os pesos dos sacos são independentes e normalmente distribuídos com média 1 Kg e variância 0.00004. À medida que a referida máquina vai enchendo os sacos, estes são transportados num tabuleiro mecânico, em grupos de 10, para uma outra máquina que os empacota.

O tabuleiro serve ainda para efectuar um controlo de pesos; assim, quando a carga, em cada transporte for superior a 10.0284 Kg ou inferior a 9.9716 Kg o tabuleiro não arranca e o grupo dos 10 sacos de açúcar é desperdiçado.

- a) Um saco de açúcar é considerado satisfatório, se tiver peso superior a um nível especificado pela Direcção. Sabendo que 94.29% dos sacos produzidos são satisfatórios, calcule o nível especificado pela Direcção.
- b) Prove que a percentagem de grupos de 10 sacos de açúcar não desperdiçados, num dia de laboração é de 84.44%.
- c) Determine a probabilidade de, num dia de laboração, o tabuleiro efectuar mais de 365 transportes.

25. O número de avarias que um comboio suburbano tem diariamente segue uma lei de Poisson. Observações foram efectuadas durante um elevado número de dias consecutivos tendo-se concluído que cerca de 81.87% dos dias, não foi detectada qualquer avaria. Calcule:

- a) A percentagem de dias em que há apenas uma avaria.
- b) A probabilidade de que, durante um ano (365 dias), se registre apenas uma avaria diariamente em pelo menos 50 dias.

26. Um posto de transformação permite uma carga total de 2800 KW. Sabe-se que esse posto de transformação alimenta uma fábrica com consumo permanente de 2540 KW e além disso o mesmo posto de transformação alimenta 100 consumidores domésticos gastando cada um, em média, 2 KW com desvio padrão de 0.5 KW para electrodomésticos e 0.5 KW, em média, com desvio padrão de 0.25 KW para iluminação. Determine a probabilidade do transformador disparar por excesso de carga admitindo que os vários tipos de consumos domésticos são independentes e normalmente distribuídos.

27. O posto de gasolina mencionado no exercício 6 do capítulo de variáveis aleatórias, situa-se numa via ao longo da qual os postos se distribuem segundo uma lei de Poisson com uma média

de 1 posto por 10 Km. Devido a uma greve no abastecimento de gasolina cada posto tem, independentemente dos outros, uma probabilidade 0.2 de estar esgotado.

- i) Qual a probabilidade de não existirem mais de dois postos nos próximos 25 Km?
- ii) Qual a probabilidade de nos próximos 30 postos mais de 10 não terem gasolina para vender?

28. Durante o mês de Janeiro de um determinado ano, a temperatura diária (em ° C) numa certa região R é uma variável aleatória X_J , com distribuição normal de média zero e desvio padrão $3/\sqrt{2}$ ° C.

No mesmo ano, a temperatura diária no mês de Agosto é uma variável aleatória X_A com distribuição normal de média 18 ° C e desvio padrão 2 ° C. Admita que as temperaturas diárias nos meses de Janeiro e de Agosto são independentes. Suponha que:

$$X_S + \frac{\sqrt{2}}{3} X_J = X_A,$$

onde X_S é a variável aleatória que representa a temperatura diária no mês de Setembro na região R.

- a) Determine a probabilidade de num dia do mês de Setembro a temperatura exceder 20 ° C.

Em relação a uma certa região o Sr. Murteira e a família classificam como agradável um dia cuja temperatura diária se encontre acima de 17 ° C e de ameno um mês com mais de 20 dias agradáveis.

- b) Mostre que a probabilidade de o mês de Agosto ser ameno na região R é de 0.9969.

29. Num dia de trabalho o Sr. Osório tem de executar várias tarefas de 2 tipos: T1 e T2. O tempo que o Sr. Osório demora a executar uma destas tarefas segue uma distribuição normal. Uma tarefa tipo T1 leva em média 15 minutos a ser executada com um desvio padrão de 3 minutos. Sabe-se que 50% das tarefas tipo T2 entregues ao Sr. Osório demoram mais de 20 minutos a ser executadas e que 5% demoram menos de 13.42 minutos. Admita que o tempo necessário à execução de uma tarefa não tem influência nos tempos de execução de outras tarefas.

- a) Calcule o valor médio e o desvio padrão do tempo que o Sr. Osório demora a executar uma tarefa T2.
- b) Suponha que o Sr Osório tem 50 tarefas T1 e 35 tarefas T2 para executar. Sabendo que trabalha 8 horas por dia, calcule a probabilidade de ele demorar mais de 3 dias a terminar todas as tarefas.
- c) O patrão do Sr. Osório dá-lhe 1 ponto de bónus por cada tarefa T1 que ele executar em menos de 13 minutos. Ao fim do mês o Sr. Osório recebe 80 000\$00 mais 100\$00 por cada ponto de bónus. Suponha que por mês o Sr. Osório tem de executar 400 tarefas T1.
 - i) Calcule a probabilidade de o Sr. Osório acumular num mês pelo menos 100 pontos.
 - ii) Calcule o salário esperado do Sr. Osório.

Soluções de alguns dos Exercícios Propostos

1. $P(X \geq 10) \cong 0$; além disso $P(X=10)=0.0000000108$, logo a desconfiança do Sr. Diogo das contas é bastante razoável.
2. -2.3937 euros.
3. É preferível o jogo A.
4. 4 a) 0.1317 b) 0.2099 c) 10/3 e 10/9
5. a) 0.9163 b) $f(x) = \begin{cases} 0.7738 & \text{se } x = 0 \\ 0.2036 & \text{se } x = 1 \\ 0.0214 & \text{se } x = 2 \\ 0.011 & \text{se } x = 3 \\ 0.0000297 & \text{se } x = 4 \\ 0.00000031 & \text{se } x = 5 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$ e $E(X)=0.25$ c) 0.236
6. a) 0.07776 b) 0.0238
7. a) 0.2092 b) 0.02153
8. 0.90464
9. a) 2/8 b) 0.214 c) 7.
10. a) 0.384 b) 0.006738
11. a) 0.0067 b) Intervalo de aproximadamente 0.7 minutos.
12. 0.6626
13. 0.9744
14. a) 0.1 b) 0.975 c) 0.075
15. a) 2.447 b) 3.707
16. a) 0.1883 b) 3.62
17. 77\$44
18. a) 91.6 b) 56.8
19. a) 0.5319 b) 0.9394 c) 0.0638
20. a) A b) B e C
21. a) 0.0398 b) $\cong 0$
22. 0.999
23. a) Distribuição de Bernoulli de parâmetro 0.6

$$f(x) = \begin{cases} 0.6^x 0.4^{(1-x)} & \text{se } x = 0 \vee x = 1 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$
 b) 7.2 c) 0.227
 d) $X = \text{"número de passos para a frente em doze"}, X \sim B(12, 0.6)$
 e) e) 0.215 f) 0.9985
24. a) 0.99 c) $\cong 1$
25. a) 0.1637 b) 0.9265
26. 0.0367
27. i) 0.5438 ii) 0.0202
28. a) 0.1867 b) 0.6406
29. a) 20.4 b) 0.6217 c) i) 0.5478 ii) 90056\$00.