Álgebra Linear e Geometria Analítica

Engenharia Electrotécnica
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

`www.estv.ipv.pt/PaginasPessoais/lucas`
`lucas@mat.estv.ipv.pt`

2007/2008

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Cap. 3 - Matrizes e Sistemas Lineares
- 3.1 Resolução de Sistemas pelo Método de Eliminação de Gauss
- 3.2 Matrizes
- 3.3 Método de Eliminação de Gauss-Jordan
- 3.4 Cálculo da Inversa de uma Matriz
- 3.5 Matrizes Elementares e de Permutação
- 3.6 Factorizações *LU* e *LDU*
- 3.7 Matrizes Simétricas, Hermíticas e Ortogonais

Exemplo (1)

Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \underset{E_3+E_1}{\overset{E_2-2E_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\underset{E_3+3E_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Substituição de variáveis (de baixo para cima): $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Matriz

Uma matriz de ordem $m \times n$ é uma expressão constituída por $m \times n$ elementos (entradas) $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ dispostos em m linhas e n colunas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & ... & . & . \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & ... & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação abreviada: a matriz pode representar-se abreviadamente por $[a_{ij}]_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n}$ ou $[a_{ij}]$ ou (a_{ij}).

Exemplo (1 - Notação matricial)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes do sistema: $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \end{array}$

Matriz coluna dos termos independentes: $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

Matriz coluna das variáveis: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

O sistema em notação matricial representa-se por $AX = b$.

Exemplo (1 - Notação matricial - *cont.*)

Matriz ampliada do sistema: $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$

Matriz em escada de linhas

Uma matriz em escada de linhas é uma matriz tal que por baixo do primeiro elemento não nulo de cada linha da matriz, e por baixo dos elementos anteriores da mesma linha, todas as entradas são nulas.

Pivô

Primeiro elemento não nulo de cada linha de uma matriz em escada de linhas.

Operações na eliminação de *Gauss* de uma matriz A

A matriz A transforma-se numa matriz em escada de linhas por meio de operações do seguinte tipo:

- substituição de uma linha pela sua soma com o produto de um número por outra linha;
- troca de linhas;
- multiplicar uma linha por um número diferente de zero (se a matriz for ampliada).

Variáveis básicas e não básicas (livres)

- As variáveis básicas são as correspondentes às colunas que têm *pivô* na matriz em escada de linhas.
- As variáveis não básicas (livres) são as correspondentes às colunas que não têm *pivô* na matriz em escada de linhas.

Característica de uma matriz A

- A característica de uma matriz A, $\text{car}(A)$, é por definição a característica da matriz em escada de linhas obtida através da eliminação de *Gauss* de A.
- Numa matriz em escada de linhas, a característica da matriz é igual ao número de *pivôs*, ou seja, ao número de linhas não nulas.

Exemplo (1 - Passos da eliminação de *Gauss*, partindo da matriz ampliada)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{L_3+L_1}{\overset{L_2-2L_1}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3+3L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

- **Classificação do sistema:** Possível determinado
- **Variáveis básicas:** x_1, x_2 e x_3
- **Variáveis livres:** não tem
- **car**(A)**=** 3

Classificação de sistemas $AX = b$

$$\begin{cases} \textbf{Possível } \mathrm{car}(A) = \mathrm{car}([A|b]) \begin{cases} \textbf{Determinado} \\ \mathrm{car}(A) = \mathrm{car}([A|b]) = n \\ \\ \textbf{Indeterminado} \text{ de grau } k (k \neq 0) \\ \mathrm{car}(A) = \mathrm{car}([A|b]) < n, \\ \text{ ou seja, } \mathrm{car}(A) = n - k \end{cases} \\ \\ \textbf{Impossível } \mathrm{car}(A) < \mathrm{car}([A|b]) \end{cases}$$

n - número de variáveis, o mesmo é dizer, número de colunas da matriz A.

Sistema Homogéneo $AX = 0$

O sistema homogéneo $AX = 0$ é sempre possível - admite pelo menos a solução $X = 0$.

Exemplo (2)

$$\begin{cases} 2x - y + v = 1 \\ -4x - 6y + 2z + 2v = 0 \\ 6x - 7y + z + 5v = 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & -6 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & -7 & 1 & 5 & 2 \end{array}\right] \underset{L_3-3L_1}{\overset{L_2+2L_1}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3-\frac{1}{2}L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

- **car**(A)**=** $2 < \text{car}([A|b]) = 3 \Rightarrow$ Sistema Impossível

Exemplo (3)

$$\begin{cases} y + z + 5v = 4 \\ -4x - y + 2z + 2v = 0 \\ 2x + y + v = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_{13}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2+2L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right] \underset{L_3-L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

- **car**(A)**=** $\text{car}([A|b]) = 3 < n = 4 \Rightarrow$ Sistema Possível Indeterminado (grau de indeterminação 1)
- **Variáveis básicas:** x, y e z
- **Variáveis livres:** v

Exemplo (3 - *cont.*)

Matriz em escada de linhas: $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

O sistema dado é equivalente a $\begin{cases} 2x+y+v=1 \\ y+2z+4v=2 \\ -z+v=2 \end{cases}$

Substituição de variáveis:

$$\begin{cases} x=\frac{-5+5v}{2} \\ \\ y=6-6v \quad , v\in\mathbb{R} \\ \\ z=-2+v \end{cases}$$

Exercício

O Pedro é aluno do 1º ano do curso de Eng. Electrotécnica da ESTV e está matriculado em Análise Matemática I (AMI), Álgebra Linear e Geometria Analítica (ALGA), Programação de Computadores (PC), Física Geral (FG) e Desenho Electrotécnico (DE). O Pedro consegue estudar em média à:

- segunda: 0 horas de AMI, 1 hora de PC, $\frac{1}{2}$ hora de ALGA, $\frac{1}{2}$ de FG e $\frac{1}{2}$ de DE;
- terça: 2 horas de AMI, 0 horas de ALGA e de PC, 1 hora de FG e $\frac{1}{2}$ hora de DE;
- quarta: 1 hora de AMI, 1 hora de ALGA, 1 hora de PC, 0 horas de FG e $\frac{1}{2}$ hora de DE;
- quinta: $\frac{1}{2}$ hora de AMI, $\frac{1}{2}$ hora de PC, 0 horas de ALGA e de DE, $\frac{3}{2}$ hora de FG;
- sexta: 0 horas de AMI, de PC e de FG, $\frac{1}{2}$ hora de ALGA e $\frac{1}{2}$ hora de DE.

Exercício (*cont.*)

1. O Pedro pretende determinar o número de horas que tem estudar de cada disciplina de forma que à segunda estude 20 horas, à terça 40 horas, à quarta 40 horas, à quinta 20 horas e à sexta 10 horas. Formule o problema como um sistema de equações lineares.
2. Escreva o sistema na forma matricial e resolva-o usando o método de eliminação de *Gauss*.

Matrizes Especiais

Matriz linha

Uma matriz linha ou vector linha é uma matriz do tipo $1 \times n$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 5}$

Matriz coluna

Uma matriz coluna ou vector coluna é uma matriz do tipo $m \times 1$.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{4\times 1}$

Matrizes Especiais

Matriz quadrada

Uma matriz quadrada de **ordem** *n* é uma matriz do tipo $n \times n$.

Exemplos : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}_{4\times 4}$

Diagonal secundária Diagonal principal

Matriz rectangular

Uma matriz rectangular é uma matriz do tipo $m \times n$ em que $m \neq n$.

Exemplo : $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 4}$

Matrizes Especiais

Matriz triangular

Uma matriz triangular é uma matriz quadrada em que são nulos os elementos situados para um dos lados da diagonal principal.

Exemplos :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ Matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Matriz triangular inferior

Matrizes Especiais

Matriz Diagonal

Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada em que são nulos todos os elementos situados fora da diagonal principal.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz identidade

A matriz identidade é uma matriz diagonal constituída por uns na diagonal principal. Denota-se por I_n.

Exemplos: $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matrizes Especiais

Matriz nula

A matriz nula é uma matriz constituída por apenas elementos nulos. Denota-se por $O_{m\times n}$. Se $m = n$ pode representar-se por O_n.

Exemplos: $O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$ designa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$ designa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Matrizes Especiais

Matriz transposta

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
A matriz transposta de $A = [a_{ij}]$, do tipo $m \times n$, é dada por $A^T = [a_{ji}]$, do tipo $n \times m$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}^T_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Operações com Matrizes

Igualdade de matrizes

Duas matrizes são iguais se forem do mesmo tipo e se tiverem elementos homólogos iguais.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & x \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Se $x = 5$ então $A = B$.

Não existe valor para x de forma que $A = C$, uma vez que A e C não são do mesmo tipo.

Operações com Matrizes

Adição de matrizes

Dadas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do tipo $m \times n$, a sua adição é a matriz soma de tipo $m \times n$ dada por:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Propriedades da adição de matrizes

Sejam A, B e C matrizes de tipo $m \times n$. Então:

- $A + B = B + A$;
- $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- Existe uma matriz nula, $O_{m\times n}$, tal que $O_{m\times n} + A = A + O_{m\times n} = A$;
- Para cada matriz $A = [a_{ij}]$, existe a matriz $-A = [-a_{ij}]$ tal que $A + (-A) = -A + A = O$.

Operações com Matrizes

Multiplicação de um escalar por uma matriz

O produto de um escalar α (real ou complexo) por uma matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ é a matriz $m \times n$ dada por:

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]$$

Exemplo:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Propriedades da multiplicação escalar

Sejam A e B duas matrizes do mesmo tipo e α e β dois escalares. Então:

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $1A = A$;
- Para cada matriz A, existe a matriz $-A = (-1)A$, tal que $A + (-A) = O$.

Operações com Matrizes

Multiplicação de matrizes

Se A é uma matriz de tipo $m \times r$ e B é uma matriz de tipo $r \times n$ então o produto AB é uma matriz do tipo $m \times n$ cujos elementos são determinados da seguinte forma:

- o elemento da linha i e coluna j de AB obtém-se da linha i de A e da coluna j de B através da soma do produto dos correspondentes elementos.

Notação abreviada: $AB = [\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}]$

Operações com Matrizes

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 26 & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \times 4) + (6 \times 3) + (0 \times 5) = 26$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & 13 \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \times 3) + (2 \times 1) + (4 \times 2) = 13$$

Operações com Matrizes

Exemplo (*cont.*)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(1 \times 4) + (2 \times 0) + (4 \times 2) = 12$$

$$(1 \times 1) - (2 \times 1) + (4 \times 7) = 27$$

$$(1 \times 4) + (2 \times 3) + (4 \times 5) = 30$$

$$(2 \times 4) + (6 \times 0) + (0 \times 2) = 8$$

$$(2 \times 1) - (6 \times 1) + (0 \times 7) = -4$$

$$(2 \times 3) + (6 \times 1) + (0 \times 2) = 12$$

Operações com Matrizes

Observações:

- Só é possível efectuar o produto AB se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

$$A_{m\times r} \qquad B_{r\times n} = AB_{m\times n}$$

iguais

- O produto de matrizes não é comutativo.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

Propriedades da multiplicação de matrizes

- $A(BC) = (AB)C$, para quaisquer matrizes $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{p\times q}$;
- $A(B + C) = AB + AC$, para quaisquer matrizes $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ e $C_{n\times p}$;
  $(A + B)C = AC + BC$, para quaisquer matrizes $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ e $C_{n\times p}$;
- $(\alpha A)B = \alpha(AB)$, para quaisquer matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$;
- $(\alpha A)(\beta B) = (\alpha\beta)(AB)$, para quaisquer matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$;
- $AI = A$ e $IB = B$, para quaisquer matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ e em que $I_{n\times n}$ é a matriz identidade de ordem n;
- $AO = O$ e $OB = O$, para quaisquer matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ e em que $O_{n\times n}$ é a matriz nula de ordem n.

Exercício (s)

1. Defina a matriz A do tipo 4×4 cujos elementos a_{ij} satisfazem a condição:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i + j \text{ é par} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

2. Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Exercício (2 - *cont.*)

Calcule (quando possível):

(a) $(BA^T - 2C)^T$;

(b) $(4B)C + 2B$;

(c) $B^T(CC^T - A^TA)$;

(d) $(-AC)^T + 5D^T$.

Resolução de Sistemas pelo Método de Eliminação de *Gauss-Jordan*

A resolução de um sistema pelo método de *Gauss-Jordan* compreende as fases:

1. Eliminação de *Gauss* da matriz ampliada do sistema. (Só interessa passar à fase seguinte se o sistema for possível);

2. A partir da matriz em escada de linhas obtida em **1**, chegar a uma matriz em que:
   - por baixo e por cima dos *pivôs*, todas as entradas sejam nulas;
   - os *pivôs* sejam iguais a 1 (multiplicação de cada linha não nula da matriz pelo inverso do número que é *pivô* dessa linha.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

Fase 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \underset{L_{12}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3+2L_1}{\overset{L_2-2L_1}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \underset{L_3-3L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

Exemplo (*cont.*)

Fase 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{5}L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1-L_3}{\overset{L_2+L_3}{\longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1-L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Solução $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Cálculo da Inversa de uma Matriz

Matriz invertível

A matriz quadrada A de ordem n diz-se **invertível** se existir uma matriz quadrada B de ordem n tal que $AB = I$ e $BA = I$.
Nesse caso, B diz-se a **inversa** de A e representa-se por A^{-1}.

Matriz singular e matriz não singular

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

- A diz-se **singular** se $\text{car}(A) < n$.
- A diz-se **não singular** se $\text{car}(A) = n$.

Propriedades:

- Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e só se é não singular;
- Seja A uma matriz invertível, então:
  - A inversa é única
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- Se A e B são matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = I$ então $BA = I$;
- Se A e B são matrizes quadradas de ordem n e invertíveis então AB também é invertível, tendo-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
  - Generalizando:
    Se A_1, A_2,...,A_n são matrizes quadradas da mesma ordem, todas invertíveis, então o produto $A_1A_2...A_n$ é invertível, tendo-se

$$(A_1A_2...A_n)^{-1} = A_n^{-1}...A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

Aplicação do Método de *Gauss-Jordan* ao Cálculo da Inversa de uma Matriz

Método:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \rightarrow \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{eliminação de } Gauss\text{-}Jordan} \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

Exemplo

Calcular a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo (*cont.*)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 - \frac{5}{3}L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{3L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \underset{L_1 - 4L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 21 & -12 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{\frac{1}{3}L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \dashrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercício (s)

1. Determine a matriz A tal que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Determine todos os valores reais de a, b e c para os quais $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ é invertível.

Matrizes Elementares

Matriz elementar é uma matriz quadrada que se obtém da identidade substituindo o elemento nulo situado na linha i e coluna j por α. Denota-se por $E_{ij}(\alpha)$ ou E_{ij}.

Exemplos

- Matrizes elementares de ordem 3:

$$E_{21}(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{32}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrizes elementares de ordem 4:

$$E_{41}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{32}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O efeito de multiplicar $E_{ij}(\alpha)$ por uma matriz qualquer A é substituir a linha i de A pela soma com a linha j multiplicada pelo escalar α.

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}, \text{ tem-se } E_{ij}(\alpha)\, A = E_{ij}(\alpha) \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i + \alpha L_j \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$$

Na eliminação de Gauss, cada operação elementar da forma $A \xrightarrow[L_i+\alpha L_j]{} A'$ pode ser traduzida por

$$E_{ij}(\alpha)\, A = A'$$

Exemplo

Efectuar a operação elementar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow[L_3+2L_1]{} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A_1}$$

equivale a efectuar o produto

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}(2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A_1}$$

As matrizes elementares são invertíveis e tem-se

$$\left(E_{ij}(\alpha)\right)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedade do produto de matrizes elementares

O produto de matrizes elementares por ordem crescente do índice das colunas

$$\underbrace{E_{21}(\alpha_{21})\ E_{31}(\alpha_{31})\ E_{41}(\alpha_{41}) \ldots E_{m1}(\alpha_{m1})}_{\text{coluna } 1}\ \underbrace{E_{32}(\alpha_{32})\ E_{42}(\alpha_{42}) \ldots E_{m2}(\alpha_{m2})}_{\text{coluna } 2} \ldots \underbrace{E_{m,m-1}(\alpha_{m,m-1})}_{\text{coluna } m-1}$$

é igual à matriz identidade substituindo cada elemento da posição ij por α_{ij}, ou seja, à matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \alpha_{m4} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}(1)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}(2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}(-3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de Permutação

Matriz de permutação é uma matriz cujas linhas são todas as linhas da identidade colocadas por uma ordem qualquer.

A matriz P_{ij} resulta da matriz identidade por troca da linha i pela linha j.

Exemplos

- Matrizes de permutação de ordem 3:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matrizes de permutação de ordem 4:

$$P_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O efeito da multiplicação de uma matriz de permutação P_{ij} por uma matriz qualquer A é trocar a linha i com a linha j de A.

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}, \ \text{ tem-se } \ P_{ij}\, A = P_{ij} \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$$

Na eliminação de Gauss, cada operação do tipo troca de linhas $A \underset{L_{ij}}{\rightarrow} A'$ pode ser traduzida por

$$P_{ij}\, A = A'$$

Exemplo

Efectuar a operação

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underset{L_{13}}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1}$$

equivale a efectuar o produto

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P_{13}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1}$$

As matrizes de permutação são invertíveis e tem-se

$$P^{-1} = P^T$$

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorização *LU*

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_3-1L_1}{\overset{L_2-2L_1}{\longrightarrow}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1} \underset{L_3+2L_2}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{U}$$

Das propriedades das matrizes elementares, tem-se

$$A_1 = E_{21}(-2)\ E_{31}(-1)\ A$$

$$U = E_{32}(2)\ A_1$$

Portanto,

$$U = \underbrace{E_{32}(2)\ E_{21}(-2)\ E_{31}(-1)}_{B}\ A$$

$$U = BA \Leftrightarrow B^{-1}U = \underbrace{B^{-1}B}_{I}\ A \Leftrightarrow A = \underbrace{B^{-1}}_{L}\ U$$

Exemplo (*cont.*)

$$\begin{aligned} L = B^{-1} &= [E_{32}(2)\ E_{21}(-2)\ E_{31}(-1)]^{-1} \\ &= [E_{31}(-1)]^{-1}\ [E_{21}(-2)]^{-1}\ [E_{32}(2)]^{-1} \\ &= E_{31}(1)E_{21}(2)E_{32}(-2) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Os elementos que estão abaixo da diagonal principal são os **simétricos dos multiplicadores** -2, -1 e 2, utilizados na eliminação de *Gauss*.

Então,

$$A = LU \Leftrightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{U}$$

Em geral, se A é uma matriz $m \times n$ e U é a matriz em escada de linhas que resulta da eliminação de *Gauss* de A, ao longo da qual não houve troca de linhas, então

$$A = LU$$

onde L é a matriz $m \times m$ que se obtém da matriz identidade substituindo, para cada operação elementar $L_i + \alpha L_j$ feita ao longo da eliminação de *Gauss*, a entrada nula da linha i e da coluna j pelo **simétrico do multiplicador**, isto é, por $-\alpha$.

A quadrada

No caso particular de A ser uma matriz quadrada, a matriz U resultante da sua eliminação de *Gauss* é triangular superior. Como L é triangular inferior, a decomposição LU de A é o produto de duas matrizes triangulares, por isso se designa de ***factorização triangular*** de A.

Factorização *LDU*

Obtém-se da factorização LU, decompondo a matriz U no produto de uma matriz D, com uma matriz que também se designa por U, onde:

- D é uma matriz $m \times m$ diagonal cujos elementos da diagonal principal são os pivôs da eliminação de *Gauss* ou zero no caso de não haver pivô;
- U é uma matriz $m \times n$ obtida após eliminação de *Gauss*, dividindo cada linha pelo respectivo pivô.

Exemplo

$$A = LU \Leftrightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$A = LDU \Leftrightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

Factorização $PA = LU$ ou $PA = LDU$

A eliminação de *Gauss* de uma matriz A pode ser feita:

- sem troca de linhas $\dashrightarrow$ factorização LU ou LDU de A
- com troca de linhas $\dashrightarrow$ factorização LU ou LDU de PA

Se A é uma matriz $m \times n$ e U é a matriz em escada de linhas que resulta da eliminação de *Gauss* de A, ao longo da qual houve troca de linhas, então

$$PA = LU$$

onde P é a matriz $m \times m$ de permutação correspondente às trocas de linhas.

A factorização $PA = LU$ ou $PA = LDU$ pode ser resumida pelos seguintes passos:

1. Fazer a eliminação de *Gauss* à matriz A
2. Determinar a matriz P que é igual ao produto à esquerda das matrizes P_{ij}, à medida que forem aparecendo.
3. Calcular a matriz PA
4. Fazer a eliminação de *Gauss* à matriz PA (sem trocar linhas) de modo a obter a factorização $PA = LU$ ou $PA = LDU$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 - L_1}{\overset{L_2 - 2L_1}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{L_{23}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = U$$

$$P = P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 - 1L_1}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = U$$

$$PA = LU \Leftrightarrow PA = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{U}$$

$$PA = LDU \Leftrightarrow A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

Matriz simétrica e matriz anti-simétrica

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- A diz-se simétrica se $A^t = A$.
- A diz-se anti-simétrica se $A^t = -A$.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$ Matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ Matriz anti-simétrica

Propriedades da transposição de matrizes

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e α um escalar.

- $(A^t)^t = A$;
- $(A + B)^t = A^t + B^t$;
- $(AB)^t = B^t A^t$;
- $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;
- Se A é invertível, então A^t é invertível, tendo-se $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$;
- $(A^k)^t = (A^t)^k$.

Matriz conjugada

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.
A matriz conjugada de $A = [a_{ij}]$, do tipo $m \times n$, é dada por $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]$, onde $\overline{a}_{ij}$ denota o conjugado de a_{ij}.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1-i & -2 \\ -3+i & -2+i & 0 \\ 0 & -1+2i & -5i \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1+i & -2 \\ -3-i & -2-i & 0 \\ 0 & -1-2i & 5i \end{bmatrix}$$

Propriedades da conjugação de matrizes

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

- $\overline{\overline{A}} = A$;
- $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$;
- $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$;
- $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\overline{A}$;
- Se A é invertível, então $\overline{A}$ é invertível, tendo-se $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$;
- $\overline{A^k} = \overline{A}^k$.

Matriz transconjugada

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.
A matriz transconjugada de $A = [a_{ij}]$, do tipo $m \times n$, é dada por $A^* = [\overline{a}_{ji}]$, do tipo $n \times m$.

Notação: $A^* = A^H = (\overline{A})^t = \overline{A^t}$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1-i & -2 \\ -3+i & -2+i & 0 \\ 0 & -1+2i & -5i \end{bmatrix} \qquad A^* = \begin{bmatrix} 4 & -3-i & 0 \\ 1+i & -2-i & -1-2i \\ -2 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

Propriedades da transconjugação de matrizes

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

- $(A^*)^* = A$;
- $(A+B)^* = A^* + B^*$;
- $(AB)^* = B^* A^*$;
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;
- Se A é invertível, então A^* é invertível, tendo-se $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$;
- $(A^k)^* = (A^*)^k$.

Matriz hermítica e matriz anti-hermítica

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

- A diz-se hermítica se $A^* = A$.
- A diz-se anti-hermítica se $A^* = -A$.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4-i & 1+i \\ 4+i & -6 & 2 \\ 1-i & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ Matriz hermítica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4+i & 1 \\ 4+i & 0 & 2+i \\ -1 & -2+i & 0 \end{bmatrix}$$ Matriz anti-hermítica

Cap. 3 - Matrizes e Sistemas Lineares 3.7 Matrizes Simétricas, Hermíticas e Ortogonais

Matriz ortogonal

Uma matriz A quadrada de ordem n diz-se ortogonal se

$$AA^t = I \quad \text{e} \quad A^tA = I$$

ou

$$A \text{ for invertível e } A^t = A^{-1}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício (s)

Determine os valores de a, b e c para os quais:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & 5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ é simétrica.
2. $A = \begin{bmatrix} 0 & a+bi & bi \\ -3+i & 0 & -3+2i \\ i & 3+2i & c \end{bmatrix}$ é anti-hermítica.