CAP. 8 – PRODUTO EXTERNO E PRODUTO MISTO

8.1 PRODUTO EXTERNO

Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ dois vectores de IR^3.

Chama-se **produto externo de u por v** ao vector de IR^3

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Representando por **i**, **j** e **k** os vectores da base canónica de IR^3, podemos escrever:

$$u = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \quad e \quad v = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

PRODUTO EXTERNO E PRODUTO MISTO

Então

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Fazendo o desenvolvimento de Laplace deste determinante em relação à 1ª linha, obtemos:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

PROPRIEDADES

1) $u \times v = - v \times u$ (**anti-simétrica**);

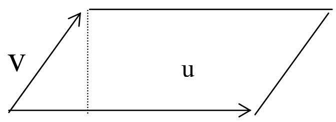
2) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$ e $(\alpha u) \times v = \alpha\, (u \times v)$ (**linearidade**);

3) $u \times v$ é ortogonal a u e v (**ortogonalidade**);

4) u e v são linearmente dependentes se e só se $u \times v = 0$;

5) A **área do paralelogramo** que tem como dois lados os vectores linearmente independentes u e v é igual a **$\| u \times v \|$**

Em particular,



$$\| u \times v \| = \|u\| \,.\, \|v\| \,.\, \sin\,(< (u, v))$$

GEOMETRICAMENTE

O produto externo de dois vectores u e v não colineares é um vector cujo:

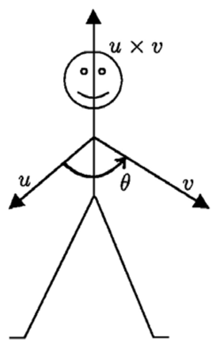
- **comprimento** é igual a $\|u\| \,.\, \|v\| \,.\, \sin\,(< (u, v))$;
- **direcção** é ortogonal ao plano definido pelos vectores u e v (considerados aplicados no mesmo ponto);

- **sentido** pode ser determinado pelo processo seguinte:

  Consideramos os vectores u e v a apontarem no sentido dos braços direito e esquerdo, respectivamente, de um observador, de tal modo que o ângulo formado entre os dois está na frente do observador.

  Então,

  $u \times v$ tem o sentido da origem comum a u e v, para a cabeça do observador.



PRODUTO EXTERNO E PRODUTO MISTO

8.2 PRODUTO MISTO

Sejam u, v e w vectores de IR^3.

Chama-se **produto misto** dos vectores u, v e w como sendo o número real:

$$\mathbf{u \times v \mid w}$$

- Cálculo do produto misto usando um determinante.

  Se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$

$$u \times v \mid w = \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

PROPRIEDADES

1) $u \times v \mid w = 0$ sse u, v e w são linearmente dependentes;

2) Se u, v e w são três vectores linearmente independentes então definem um **paralelepípedo de volume** $|\, u \times v \mid w \,|$