Álgebra Linear e Geometria Analítica

Engenharia Electrotécnica
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

`www.estv.ipv.pt/PaginasPessoais/lucas`
`lucas@mat.estv.ipv.pt`

2007/2008

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Cap. 6 - Valores Próprios e Vectores Próprios

6.1 Definição
6.2 Espaços Próprios
6.3 Polinómio e Equação Característicos
6.4 Cálculo dos Valores Próprios e dos Vectores Próprios de uma Matriz
6.5 Diagonalização de uma Matriz

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

Valor Próprio e Vector Próprio

Um escalar λ diz-se um valor próprio de A se existir um vector não nulo $x_{n\times 1}$, tal que

$$Ax = \lambda x \qquad (Ax = \lambda x \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda I)x = 0)$$

O vector x diz-se vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x} = 2\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x}$$

Logo 2 é um valor próprio da matriz A e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um seu vector próprio.

Observações

- Um vector próprio é, por definição, não nulo.
- Um vector próprio está associado apenas a um valor próprio, mas a um valor próprio estão associados uma infinidade de vectores próprios.

Espaço Próprio

Seja λ um valor próprio de A. O subespaço

$$E(\lambda) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{K}^n : (A - \lambda I)x = 0\}$$

é um subespaço de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) e diz-se o espaço próprio de A associado ao valor próprio λ.

Exemplo

2 é um valor próprio da matriz

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E(2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : (A - 2I)x = 0\}$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-2I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(2) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\} \\ &= \{(x_2, x_2) = (1,1)x_2 : x_2 \in \mathbb{R}\} = < (1,1) > \end{aligned}$$

Cálculo dos Valores Próprios de uma Matriz

Determinar os valores próprios de A consiste em determinar os valores λ que satisfazem a equação

$$|A - \lambda I| = 0$$

A expressão $|A - \lambda I|$ denomina-se o polinómio característico de A e a equação $|A - \lambda I| = 0$ denomina-se a equação característica de A.

Multiplicidade Algébrica e Multiplicidade Geométrica de um Valor Próprio

- A multiplicidade algébrica do valor próprio λ é a multiplicidade de λ como raiz da equação característica. Denota-se por $ma(\lambda)$.
- A multiplicidade geométrica do valor próprio λ é a dimensão do espaço próprio de A associado ao valor próprio λ.
  Denota-se por $mg(\lambda)$.

Exemplo (*Ex. 2d) da Ficha nº11*)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Equação Característica:

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| = 0 \quad & \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3-\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow (2-\lambda)(12 - 7\lambda + \lambda^2 - 6) - (8 - 2\lambda - 6) + (6 - 9 + 3\lambda) = 0 \\
& \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) - 2 + 2\lambda - 3 + 3\lambda = 0 \\
& \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 14\lambda + 12 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda - 5 + 5\lambda = 0 \\
& \Leftrightarrow -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = 0 \\
& \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-7) = 0 \\
& \Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-7) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mathbf{1} \vee \lambda = \mathbf{7}
\end{aligned}$$

Valores Próprios:

- $\lambda = \mathbf{1}$ de multiplicidade algébrica $\mathbf{2} \Leftrightarrow ma(\mathbf{1}) = \mathbf{2}$
- $\lambda = \mathbf{7}$ de multiplicidade algébrica $\mathbf{1} \Leftrightarrow ma(\mathbf{7}) = \mathbf{1}$

Exemplo (*cont.*)

$E(\mathbf{1}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (A - \mathbf{1}I)x = 0\}$

$$A - \mathbf{1}I = \begin{bmatrix} 2-\mathbf{1} & 1 & 1 \\ 2 & 3-\mathbf{1} & 2 \\ 3 & 3 & 4-\mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 - 2L_1}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \mathbf{1}I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{1}) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -x_2 - x_3\} \\
&= \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) = (-1, 1, 0)x_2 + (-1, 0, 1)x_3 : \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \\
&= < (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) >
\end{aligned}$$

Base de $E(\mathbf{1}) = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

$dim(E(\mathbf{1})) = \mathbf{2} \ \Rightarrow \ mg(\mathbf{1}) = \mathbf{2}$

Exemplo (*cont.*)

$E(7) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (A - 7I)x = 0\}$

$$A - 7I = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+\frac{3}{5}L_1]{L_2+\frac{2}{5}L_1} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{18}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_2]{} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{18}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 7I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -\frac{18}{5}x_2 + \frac{12}{5}x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(7) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = \tfrac{1}{3}x_3 \wedge x_2 = \tfrac{2}{3}x_3\} \\ &= \{(\tfrac{1}{3}x_3, \tfrac{2}{3}x_3, x_3) = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1)x_3 : \ x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= < (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1) > \end{aligned}$$

Base de $E(7) = \{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)\}$ $dim(E(7)) = \mathbf{1} \ \Rightarrow \ mg(7) = \mathbf{1}$

Teorema

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.
Se $u_1, u_2, ..., u_k$ são vectores próprios de A associados a valores próprios todos distintos, então são linearmente independentes.

Corolário

Uma matriz de ordem n não tem mais do que n valores próprios.

Matrizes Semelhantes e Matriz Diagonalizável

- Duas matrizes A e B dizem-se semelhantes se existir uma matriz invertível S tal que $A = SBS^{-1}$.
- Uma matriz A diz-se diagonalizável se for semelhante com uma matriz diagonal, ou seja, se existir uma matriz diagonal D e uma matriz invertível S tais que $A = SDS^{-1}$. Neste caso S diz-se uma matriz diagonalizante de A.

Teorema

Uma matriz A ordem n é diagonalizável se e só se A tem n vectores próprios linearmente independentes.

Dizer que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ são n vectores próprios de A linearmente independentes, associados aos valores próprios, respectivamente, $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, significa exactamente que $A = SDS^{-1}$ com

$$S = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dada uma matriz A de ordem n, três situações podem ocorrer:

1. Existem n valores prórios distintos e, portanto, existem n vectores próprios linearmente independentes, pelo que a matriz A é diagonalizável.
2. Existem m valores prórios distintos com $m < n$, mas existem n vectores próprios linearmente independentes e, portanto, a matriz A é diagonalizável.
3. Existem m valores prórios distintos com $m < n$, e não existe um conjunto com n vectores próprios que seja linearmente independente e, portanto, a matriz A não é diagonalizável.

As três situações seguintes correspondem às três situações descritas atrás:

1. A matriz tem n valores próprios distintos. Neste caso tem-se $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i) = 1$ para todo o valor próprio λ_i de A. A matriz A é diagonalizável.
2. Para cada valor próprio λ_i de A, $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$. A matriz A é diagonalizável.
3. Algum dos valores prórios tem multiplicidade geométrica inferior à multiplicidade algébrica, isto é, para algum λ_i, $mg(\lambda_i) < ma(\lambda_i)$. Neste caso, a matriz A não é diagonalizável.

Exemplo (*Ex. 11.2d) da Ficha nº11*)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$mg(\mathbf{1}) = ma(\mathbf{1}) = \mathbf{2}$$

$$mg(\mathbf{7}) = ma(\mathbf{7}) = \mathbf{1}$$

Logo, A é diagonalizável.

Então,

$$\exists S : A = SDS^{-1}, \text{ com } D = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$