# Distribuições por Amostragem

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Viseu





## População, amostra e inferência estatística

### Exemplo (1)

O João é licenciado em Gestão pela ESTV e está a trabalhar para a fábrica VisaTexteis. A fábrica recebeu recentemente uma encomenda de 500 rolos de linhas de várias cores. O João tem de verificar se os rolos recebidos estão de acordo com as especificações feitas. Entre as especificações de qualidade, exigia-se que cada rolo tivesse pelo menos 500 metros de comprimento. Como deve o João proceder? Obviamente não é possível observar um a um, todos os 500 rolos que compõem esta população.

### Exemplo (2)

Para elaborar uma notícia, um determinado jornal semanal pretende saber qual a opinião dos portugueses relativamente a um dado projecto governamental. Obviamente, o jornal não poderá inquirir todos os Portugueses.

# População, amostra e inferência estatística

Em situações como as ilustradas nos exemplos anteriores, o estudo é feito com base numa parte representativa da população, à qual se dá o nome de amostra.

A informação obtida a partir da observação dos elementos de uma amostra, conduz-nos a certas conclusões que depois inferimos para toda a população. Estamos a fazer inferência estatística.

Seja

$X$: característica numérica em estudo numa dada população

Na prática, em geral a distribuição de X não é conhecida ou sabe-se qual a forma geral da distribuição de X, mas não são conhecidos os parâmetros dessa distribuição, ditos parâmetros populacionais.





# População, amostra e inferência estatística

Como estimar o valor de uma média populacional $\mu_X$, de uma variância populacional $\sigma^2_X$ ou de uma proporção populacional $p$?

- Estimamos a média da população, $\mu_X$, através da média da amostra, $\overline{x}$.
- Usamos o desvio padrão da amostra, $s$, para aproximar ou estimar o desvio padrão na população, $\sigma_X$.
- Usamos a proporção encontrada na amostra, $\hat{p}$, para estimar a proporção populacional $p$.

# Amostra aleatória

Para fazer inferência estatística, a amostra deve ser recolhida obedecendo a certos critérios, caso contrário, as conclusões decorrentes do estudo da amostra poderão não ser válidas para toda a população.

## Exemplo (2)

Suponhamos que o director do jornal, por razões de comodidade, decide recolher opiniões numa amostra de pessoas residentes na cidade onde o jornal é editado.

A amostra retirada naquela cidade não é representativa da população portuguesa e, portanto, as conclusões retiradas no estudo não se podem estender a toda a população portuguesa.

Para obter uma amostra representativa da população portuguesa, parece razoável que se exija que cada português tenha a mesma probabilidade de vir a figurar na amostra. Temos então que escolher os portugueses para a nossa amostra perfeitamente ao acaso, i.e., aleatoriamente.





# Amostra aleatória

## Exemplo (1)

João escolheu ao acaso seis rolos do lote recebido e observou o comprimento de cada um deles, tendo obtido os seguintes valores:

$$459m \quad 455m \quad 502m \quad 501.5m \quad 500.5m \quad 456m$$

Estes valores constituem uma amostra concreta de tamanho seis.

Antes de seleccionar os rolos para a amostra, o João não é capaz de prever qual irá ser o comprimento do primeiro rolo, do segundo rolo, etc.

O comprimento do $i-$ésimo rolo seleccionado para a amostra é uma variável aleatória que representamos por $X_i$.

# Amostra aleatória

Tem-se:

- cada variável aleatória $X_i$ tem a mesma distribuição de $X$;
- as variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_6$ são independentes (selecção aleatória dos rolos - a selecção de um rolo não tem influência na selecção de qualquer outro - o valor que uma das variáveis assume não tem qualquer efeito sobre o valor que outra qualquer assume)

## Definição

Seja $X$ uma variável aleatória que representa uma característica numérica em estudo numa determinada população. Chama-se amostra aleatória de tamanho $n$ ao conjunto das variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ independentes e com a mesma distribuição de $X$.

Os valores observados das variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ numa amostra concreta são representados por letras minúsculas:

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

.





# Amostra aleatória

Quando a população é finita obtém-se uma amostra aleatória se a selecção dos elementos para a amostra é feita com reposição, pois neste caso as sucessivas extracções são independentes. Isto assegura que as variáveis aleatórias identicamente distribuídas $X_1, X_2, ..., X_n$ sejam independentes.

Muitas vezes, no entanto, a selecção dos elementos para uma amostra é feita sem reposição. Neste caso as variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ não serão independentes pois os valores que os primeiros elementos da amostra tomam condicionam os seguintes.

# Amostra aleatória

Porém, se a amostra é pequena relativamente à população, a diferença entre reposição e não reposição é atenuada, já que a retirada de alguns elementos não altera drasticamente a composição da população e por isso a não reposição do item examinado terá efeito desprezível.

Na prática, quando é feita amostragem sem reposição, é usual assumir a independência entre as variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$, se a amostra não exceder 5% do tamanho da população. Assim, se, ao contrário, a amostra exceder 5% do tamanho da população, deve-se fazer amostragem com reposição.

Do que foi dito podemos concluir que quando a população é infinita é indiferente fazer ou não reposição; a amostra recolhida será sempre aleatória.





# Estatísticas, Estimadores e Estimativas

## Definição

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias que constituem uma amostra aleatória. Chama-se estatística a uma função das variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ que não contenha parâmetros desconhecidos. Uma estatística é, assim, uma nova variável aleatória (o valor assumido por ela é variável de amostra para amostra) e terá uma distribuição de probabilidade que é designada por distribuição por amostragem.

## Definição

Chama-se estimador a qualquer estatística usada para estimar um parâmetro da população ou uma função desse parâmetro. Designa-se por estimativa o valor que um estimador assume para uma dada amostra concreta.

# Estatísticas, Estimadores e Estimativas

## Exemplos de Estatísticas e de Estimadores

1. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \hookrightarrow$ média amostral
2. $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \quad \hookrightarrow$ variância amostral
3. $T_1 = max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ou $T_1' = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
4. $T_2 = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
5. $T_3 = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$
6. $T_4 = n\sum_{i=1}^{n} X_i$

A função $T_5 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{ny}$ não é uma estatística porque $y$ não é conhecido, i.e., não é observável na amostra.

$\overline{X}$ e $S_X^2$, a média e a variância amostral, são exemplos de estimadores, usados para estimar, respectivamente, a média populacional $\mu_X$ e a variância populacional $\sigma_X^2$.





# Teorema Limite Central

O teorema limite central é considerado um dos teoremas mais importantes na Estatística. Este pode ser enunciado da seguinte maneira:

## Teorema Limite Central

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ (finita).

Seja

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Então,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

é uma v.a. cuja distribuição se aproxima da distribuição normal reduzida - $N(0,1)$, quando $n$ tende para infinito.

# Teorema Limite Central

Isto é,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \dot{\sim} N(0,1) \qquad \text{ou} \qquad S_n \dot{\sim} N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

Este teorema afirma que uma soma de variáveis aleatórias independentes e com a mesma distribuição (qualquer que ela seja) tem distribuição aproximadamente normal, desde que o número de parcelas, $n$, seja suficientemente grande.

Na prática considera-se válida esta aproximação desde que $n$ seja superior a 30.





# Distribuição da média amostral

Suponha que se extrai de uma população uma amostra aleatória, de tamanho $n$, com vista ao estudo de uma sua característica aleatória $X$, de média $\mu$ e variância $\sigma^2$.
Já sabemos que a amostra aleatória é constituída por $n$ variáveis aleatórias, $X_1, X_2, ..., X_n$, independentes e com a mesma distribuição de $X$.
Qual é o valor esperado e a variância da média amostral?

## Valor esperado da média amostral

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= E\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right) \\ &= \frac{1}{n}\Big(E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)\Big) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \ldots + \mu) = \mu \end{aligned}$$

# Distribuição da média amostral

## Variância da média amostral

$$\begin{aligned} Var(\overline{X}) &= Var\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n)\right) \\ &= \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Então,

$$\mu_{\overline{X}} = \mu \qquad \text{e} \qquad \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$$





# Distribuição da média amostral

## E quanto à distribuição de $\overline{X}$?

- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então, pelo Teorema da Aditividade da Distribuição Normal,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \sigma^2/n) \quad \Leftrightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

  pois $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e têm distribuição normal.
- Se o tamanho da amostra $n$ é suficientemente grande ($n > 30$), então pelo Teorema Limite Central

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \dot{\sim} N(\mu, \sigma^2/n) \quad \Leftrightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0,1)$$

  pois $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e têm a mesma distribuição.

# Distribuição t de Student

Vimos que, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Suponhamos que a variância populacional $\sigma^2$ é desconhecida. Qual será a distribuição de $Z$ se substituirmos a variância populacional $\sigma^2$ pelo seu estimador $S^2$?





# Distribuição t de Student

Uma variável aleatória $X$ tem distribuição t de Student com $n$ graus de liberdade se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2))}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

onde $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$

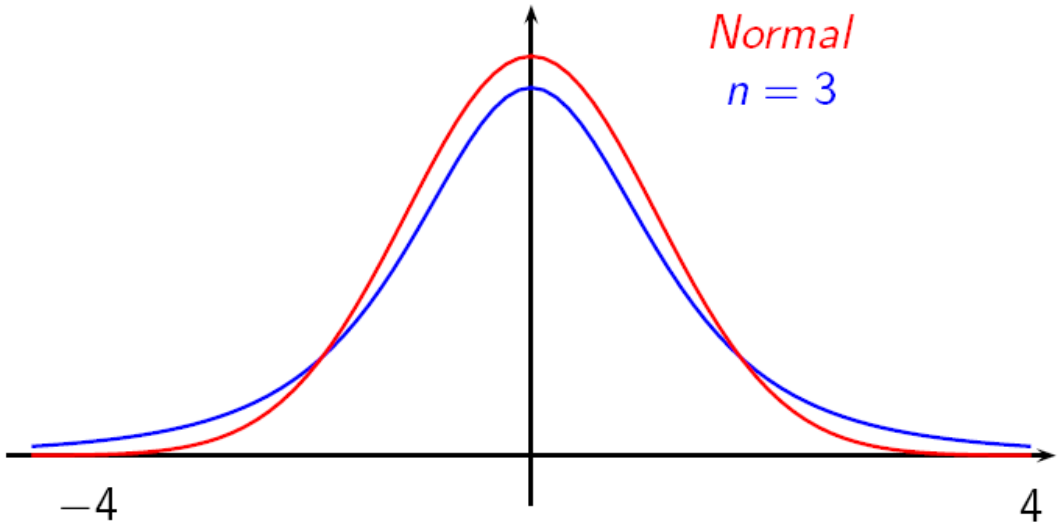
Escreve-se abreviadamente $X \sim t_n$ e tem-se

$$E(X) = 0 \qquad \text{e} \qquad Var(X) = \frac{n}{n-2}, \quad \text{para } n > 2$$

# Distribuição t de Student

O gráfico da função densidade da distribuição $t_n$ é semelhante ao da distribuição normal reduzida - $N(0,1)$. Nomeadamente, a distribuição $t_n$, tal como a distribuição $N(0,1)$, é simétrica em relação à recta $x = 0$.

À medida que $n$ tende para infinito a curva em sino da distribuição $t_n$ aproxima-se da curva da distribuição $N(0,1)$.








# Distribuição t de Student

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e a variância populacional $\sigma^2$ é desconhecida, para amostras pequenas ($n < 30$), tem-se

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

onde $S$ é o desvio padrão amostral.

Vamos usar esta estatística na construção de intervalos de confiança e nos testes de hipóteses, relativos à **média** $\mu$ de uma população normal.

# Distribuição do Qui-Quadrado

Uma variável aleatória $X$ tem distribuição do Qui-Quadrado com $n$ graus de liberdade ($\chi^2_n$) se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f_X(x) = \frac{e^{-x/2} x^{(n/2)-1}}{2^{n/2}\,\Gamma\,(n/2)}, \quad x > 0$$

onde $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$

Escreve-se abreviadamente $X \sim \chi^2_n$ e tem-se

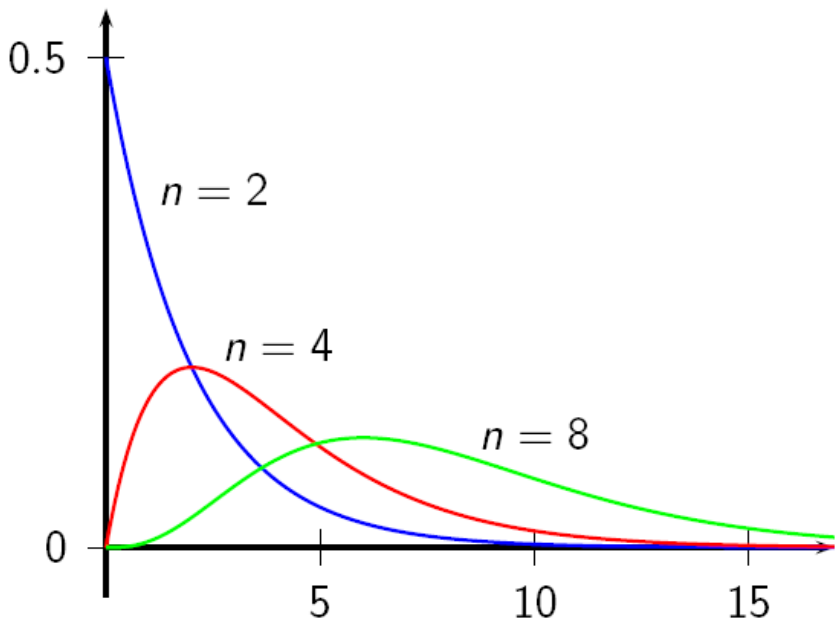
$$E(X) = n \qquad \text{e} \qquad Var(X) = 2n$$





# Distribuição do Qui-Quadrado

A distribuição é não negativa e assimétrica positiva. Apesar disso, quando $n$ tende para infinito a distribuição torna-se cada vez mais simétrica e aproxima-se da distribuição normal.



Se $X_1, X_2, ..., X_n$ é uma amostra aleatória de uma população normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2$, então

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Iremos usar esta v. a. para construir intervalos de confiança para a **variância** e para testar hipóteses relativas a este parâmetro, quando a distribuição populacional é normal.





# Distribuição F-Snedcor

A distribuição F-Snedcor pode ser definida como a razão entre duas variáveis aleatórias independentes e com distribuição do Qui-Quadrado, cada uma dividida pelos respectivos graus de liberdade.

Sejam $X_1$ e $X_2$ variáveis aleatórias independentes, com distribuição do Qui-Quadrado com $n_1$ e $n_2$ graus de liberdade, respectivamente. A variável aleatória

$$X = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$$

segue uma distribuição que se designa por distribuição F-Snedcor com $n_1$ e $n_2$ graus de liberdade ($n_1$ são ditos os graus de liberdade do numerador e $n_2$ os graus de liberdade do denominador).

Escreve-se abreviadamente $X \sim F^{n_2}_{n_1}$ ou $X \sim F_{n_1,n_2}$

# Distribuição F-Snedcor

A função densidade de probabilidade é dada por:

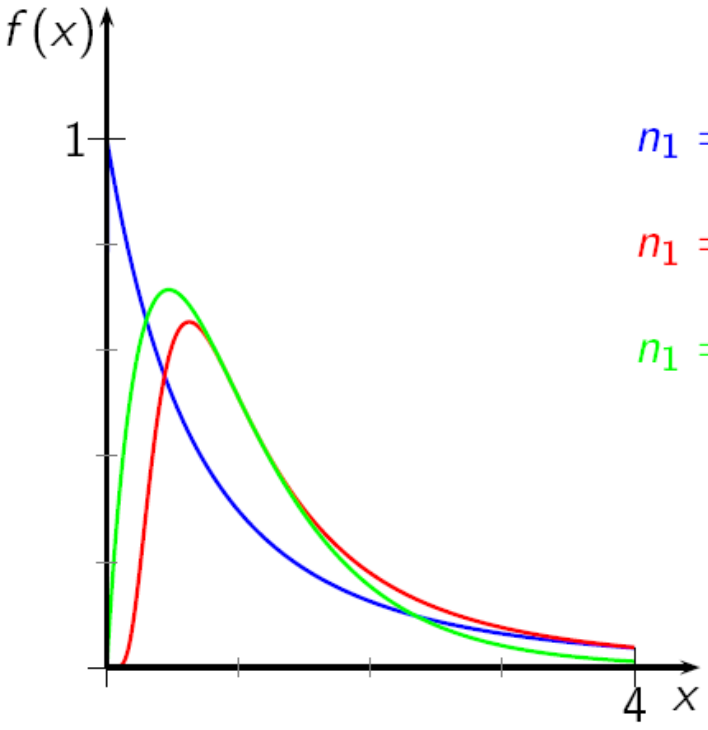
$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} x^{n_1/2-1} \left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, \quad x > 0$$

onde $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$





# Distribuição F-Snedcor




$n_1 = 2\ ,\ n_2 = 4$

$n_1 = 32\ ,\ n_2 = 4$

$n_1 = 4\ ,\ n_2 = 32$

Suponhamos que temos duas populações com distribuição normal e com variâncias $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ respectivamente.

Sejam $S_1^2$ e $S_2^2$ as variâncias amostrais baseadas em amostras independentes de tamanhos $n_1$ e $n_2$, respectivamente, dessas populações.

Então,

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{n_2-1}^{n_1-1}$$

Esta variável aleatória vai ser usada, mais adiante, na construção de intervalos de confiança e nos testes de hipóteses, relativos à **comparação de variâncias** de populações normais.