

Departamento: Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Curso: Engenharia Electrotécnica

Ano: 1º

Semestre: 1º

Ano Lectivo: 2007/2008

Ficha Prática nº1 - Números Complexos

1. Resolva em \mathbb{C} , cada uma das seguintes equações:

(a) $z^4 - 1 = 0$; (b) $z^2 + 2z + 2 = 0$; (c) $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$;

(d) $z^4 + 4z^2 + 4 = 0$; (e) $4z^3 + 13z + 17 = 0$, sabendo que admite a raiz -1

2. Determine a e b de modo que $(a - 2bi)(3 + i) = 5$.3. Apresente na forma $a + bi$, o resultado de cada uma das seguintes operações:

(a) $(5 + i) - (2 - 3i)$; (b) $2(-1 - i) - 3(2 + 3i)$; (c) $(3 - i)(2 - i) + 3 - 4i$;

(d) $(1 - 2i)^2 + (2 - i)(2 + i)$; (e) $(1 - 3i)^{-2}$; (f) $\frac{2-4i}{3+i}$; (g) $\frac{1-i}{(1+i)^2}$; (h) $\frac{(1-3i)(3+i)}{2-i}$;

(i) $\frac{(1-i)^3}{i}$; (j) $\frac{4+i}{4-i} + \frac{4-i}{4+i}$; (k) $\frac{(1-i)^2 - 2i^{95}}{i-3}$; (l) $\frac{(4-i)(3-i)}{(2+i)i}$.

4. Represente na forma trigonométrica e no plano complexo:

(a) $\sqrt{3} + 3i$; (b) $1 - i$; (c) $-i$; (d) 4 ; (e) $5i$.

5. Represente na forma algébrica e no plano complexo:

(a) $2cis(\frac{\pi}{2})$; (b) $3cis(\frac{\pi}{3})$; (c) $2cis(-\frac{\pi}{4})$; (d) $2cis(-\frac{\pi}{6})$; (e) $3cis(\frac{4}{3}\pi)$.

6. Considere os complexos $z = 1 + \sqrt{3}i$, $z' = 1 + i$, Represente, na forma trigonométrica, os números:

(a) z e z' ; (b) $z \cdot z'$ e z/z' ; (c) z^3 e z'^4 ; (d) $\bar{z}^3 \cdot z'$

7. Sendo $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, represente trigonometricamente os números:

(a) z ; (b) \bar{z} ; (c) $-z$; (d) z^3 ; (e) $\frac{(-z)^2}{\bar{z}^5}$.

8. Resolva em \mathbb{C} , cada uma das seguintes equações:

(a) $z^3 - 1 = 0$; (b) $z^3 + 8zi = 0$; (c) $z^6 + \sqrt{3} - i = 0$; (d) $z^6 + z = 0$.

9. Expresse na forma $a + bi$:

(a) e^{2+i} ; (b) e^{3-i}

10. Reduza à forma $re^{i\theta}$ cada um dos números complexos abaixo e represente-os geometricamente:

(a) $1 + i$; (b) $-2(1 - i)$; (c) $\sqrt{3} - 3i$; (d) $-1 - i/\sqrt{3}$; (e) $-1 + i\sqrt{3}$; (f) -3 .

11. Verifique as seguintes relações:

(a) $\exp(3 + 7\pi i) = -e^3$; (b) $\exp\frac{3-2\pi i}{6} = \frac{\sqrt{6}(1-i\sqrt{3})}{2}$

12. Estabeleça as fórmulas de Euler:

(a) $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; (b) $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

13. Sendo $z = re^{i\theta}$, prove que $|e^{iz}| = e^{-r \sin \theta}$.

Departamento: Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Curso: Engenharia Electrotécnica

Ano: 1º

Semestre: 1º

Ano Lectivo: 2007/2008

Soluções da Ficha Prática nº1 - Números Complexos

$$1.a) z = \pm 1 \vee z = \pm i \quad 1.b) z = -1 \pm i \quad 1.c) z = \pm 1 \vee z = \pm \sqrt{5}i$$

$$1.d) z = \pm \sqrt{2}i \vee z = \pm \sqrt{2}i \quad 1.e) z = -1 \vee z = \frac{1}{2} \pm 2i$$

$$2. a = \frac{3}{2} ; b = \frac{1}{4}$$

$$3.a) z = 3 + 4i \quad 3.b) z = -8 - 11i \quad 3.c) z = 8 - 9i \quad 3.d) z = 2 - 4i$$

$$3.e) z = -\frac{2}{25} + \frac{3}{50}i \quad 3.f) z = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i \quad 3.g) z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad 3.h) z = 4 - 2i$$

$$3.i) z = -2 + 2i \quad 3.j) z = \frac{30}{17} \quad 3.k) z = 0 \quad 3.l) z = -5 - 3i$$

$$4.a) z = 2\sqrt{3}cis\frac{\pi}{3} \quad 4.b) z = \sqrt{2}cis\frac{7\pi}{4} \quad 4.c) z = cis\frac{3\pi}{2} \quad 4.d) z = 4cis0 \quad 4.e) z = 5cis\frac{\pi}{2}$$

$$5.a) z = 0 + 2i \quad 5.b) z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \quad 5.c) z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$5.d) z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad 5.e) z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$6.a) z = 2cis\frac{\pi}{3} \vee z' = \sqrt{2}cis\frac{\pi}{4} \quad 6.b) z = 2\sqrt{2}cis\frac{7\pi}{12} \vee z' = \sqrt{2}cis\frac{\pi}{12}$$

$$6.c) z = 8cis\pi \vee z' = 4cis\pi \quad 6.d) z = 8\sqrt{2}cis\frac{5\pi}{4}$$

$$7.a) z = \sqrt{2}cis\frac{\pi}{6} \quad 7.b) z = \sqrt{2}cis\frac{11\pi}{6} \quad 7.c) z = \sqrt{2}cis\frac{7\pi}{6}$$

$$7.d) z = 2\sqrt{2}cis\frac{\pi}{2} \quad 7.e) z = \frac{\sqrt{2}}{4}cis\frac{7\pi}{6}$$

$$8.a) z \in \left\{ cis0, cis\frac{2\pi}{3}, cis\frac{4\pi}{3} \right\}$$

$$8.b) z \in \left\{ 0, 2\sqrt{2}cis\frac{3\pi}{4}, 2\sqrt{2}cis\frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$8.c) z \in \left\{ \sqrt[6]{2}cis\left(\frac{5\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}\right), k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \right\}$$

$$8.d) z \in \left\{ 0, cis\frac{\pi}{5}, cis\frac{3\pi}{5}, cis\pi, cis\frac{7\pi}{5}, cis\frac{9\pi}{5} \right\}$$

$$9.a) z = e^2 \cos 1 + ie^2 \sin 1 \quad 9.b) z = e^3 \cos(-1) + ie^3 \sin(-1)$$

$$10.a) z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \quad 10.b) z = 2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} \quad 10.c) z = 2\sqrt{3}e^{(-\frac{\pi}{3}i)}$$

$$10.d) z = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{7\pi}{6}i} \quad 10.e) z = 2e^{(\frac{5\pi}{6}i)} \quad 10.f) z = 3e^{\pi i}$$