Departamento: Matemática — **Álgebra Linear e Geometria Analítica**

Curso: Engenharia Electrotécnica **Ano:** 1º **Semestre:** 1º **Ano Lectivo:** 2007/2008

Ficha Prática nº13 - Produto Externo e Produto Misto

1. Calcule os seguintes produtos externos:

   (a) $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (b) $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$ (c) $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$ (d) $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$ (e) $-\mathbf{k} \times 2\mathbf{j}$

2. Com $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, calcule os vectores seguintes em termos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. (Em seguida, responda a: Será o produto externo associativo?)

   (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (c) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

3. Calcule os vectores de comprimento 1 em $\mathbb{R}^3$ que são ortogonais a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, para:

   (a) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 0)$.

4. Calcule a área do triângulo de vértices $A = (0, 1, 1)$, $B = (2, 0, -1)$ e $C = (3, 4, 0)$.

5. Calcule todos os vectores de norma igual a $\frac{\sqrt{6}}{4}$ e que são perpendiculares ao plano definido por $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, -1)$.

6. Determine os valores do parâmetro real α para os quais os vectores $(1, \alpha, 1)$ e $(4, -2, -2)$ definem um paralelogramo de área igual a $4\sqrt{21}$.

7. Prove que $\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|$ se e s´o se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais.

8. Prove que se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vectores em $\mathbb{R}^3$ tais que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$ e $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= 0$, então pelo menos um deles zero. Interprete geometricamente este resultado.

9. Determine o volume do paralelipípedo definido pelos vectores $\mathbf{a} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{c} = (1, 2, -3)$.

10. Determine os valores do parâmetro real k para os quais os pontos $A = (1, 1, -1)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (3, 2, -1)$ e $D = (2, 1, k - 1)$ são complanares.

11. Verifique que os vectores $\mathbf{u} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{i}$ definem um tetaedro (quando aplicados num ponto) e determine o seu volume.

    (Tenha em conta que o volume de um tetaedro de vértices A, B, C e D é igual a um sexto do paralelipípedo gerado pelas arestas $[AB]$, $[AC]$ e $[AD]$, já que neste podemos inscrever seis tetaedros congruentes com o tetaedro considerado.)

12. Relativamente aos pontos $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 3, -3)$, $C = (4, 1, -1)$ e $D = (1, 1, 1)$, verifique se são não complanares e, caso o sejam, determine a altura do paralelipípedo definido pelos vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$ relativamente à base gerada pelas arestas $[AB]$ e $[AC]$.

13. Sejam $A = (\alpha, 1, 2)$, $B = (2, \alpha, 1)$ e $C = (1, 0, 1)$ três pontos do espaço. Determine os valores do parâmetro real α para os quais

    (a) O, A, B e C são complanares;

    (b) o volume do tetaedro de vértices O, A, B e C é igual a 2.

14. Considere os vectores $u = (1, -2, 0)$ e $v = (0, -3, 1)$ e os pontos $A = (0, 1, -1)$ e $B = (2, 0, -3)$.

    (a) Determine um vector unitário ortogonal a u e a v.

    (b) Calcule o volume do paralelepípedo definido pelos vectores $\overrightarrow{AB}, u$ e v.

15. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

    (a) Calcule $\det(A)$.

    (b) Justifique, usando a alínea anterior, que os vectores $u_1 = (2, 2, -1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ e $u_3 = (4, 1, -6)$ definem um paralelepípedo e indique o seu volume.

Departamento: Matemática **Álgebra Linear e Geometria Analítica**

Curso: Engenharia Electrotécnica **Ano:** 1º **Semestre:** 1º **Ano Lectivo:** 2007/2008

Soluções da Ficha Prática nº13 - Produto Externo e Produto Misto

1.(a) $k = (0, 0, 1)$; 1.(b) $i = (1, 0, 0)$; 1.(c) $j = (0, 1, 0)$;
1.(d) $-j = (0, -1, 0)$; 1.(e) $2i = (2, 0, 0)$.

2.(a) $2i + j - k = (2, 1, -1)$; 2.(b) $5i + j - k = (5, 1, -1)$;
2.(c) $-4i + 4j - 16k = (-4, 4, 16)$; 2.(d) $-3i - 3j - 9k = (-3, -3, -9)$.
O produto externo não é associativo.

3.(a) $w = (-\frac{\sqrt{26}}{26}, \frac{2\sqrt{26}}{13}, -\frac{3\sqrt{26}}{26})$; 3.(b) $w = (-\frac{2\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{4\sqrt{21}}{21})$.

4. $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\sqrt{146}$.

5. $y_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ e $y_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

6. $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{366}}{5}$.

9. $\mathrm{V} = 5$.

10. $k = -1$.

11. $\mathrm{V} = \frac{1}{6}$.

12. $\mathrm{h} = \frac{10\sqrt{21}}{63}$.

13.(a) $\alpha = 1 \pm \sqrt{2}$ 13.(b) $\alpha = 1 \pm \sqrt{14}$.

14.(a) $w = (-\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14})$; 14.(b) $\mathrm{V} = 3$.

15.(a) $\det(A) = 2\alpha + 10$; 15.(b) $\mathrm{V} = 2$.