Instituto Politécnico de Viseu   Escola Superior de Tecnologia

Departamento: Matemática   **Álgebra Linear e Geometria Analítica**

Curso: Engenharia Electrotécnica   **Ano:** 1º   **Semestre:** 1º   **Ano Lectivo:** 2007/2008

Ficha Prática nº3 - Sistemas de Equações Lineares - Eliminação de Gauss

1. Resolva e classifique os seguintes sistemas de variáveis reais, usando o método de eliminação.

   Registe os pivots utilizados, as variáveis básicas e as variáveis livres.

   (a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -7 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$

   (g) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 16 \\ x_1 + x_3 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 = -13 \end{cases}$

2. Resolva e classifique os seguintes sistemas de variáveis complexas, usando o método de eliminação.

   Registe os pivots utilizados, as variáveis básicas e as variáveis livres.

   (a) $\begin{cases} iz + (1+i)w = 3 + i \\ (1-i)z - (6-i)w = 4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -z_1 + 2z_2 = 1 \\ 2z_1 - 4z_2 = -2 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 = 1 \\ (1-i)z_1 + 2z_3 = i \\ iz_1 + iz_2 - (1+i)z_3 = i \end{cases}$

3. Para cada um dos seguintes sistemas reais, escreva a solução geral como soma de uma solução particular, caso exista, com a solução do sistema homogéneo correspondente:

$$(a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -14 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 19 \end{cases}$$

4. Determine os valores de α para os quais o sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$$

(i) não tem solução; (ii) tem uma solução; (iii) tem uma infinidade de soluções.

5. Discuta os seguintes sistemas em função dos respectivos parâmetros

$$(a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \beta + 1 \\ x_1 + \beta x_2 + x_3 = 1 \\ \beta x_1 + x_2 = \beta + 2\beta^2 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + (1-\beta)x_3 = \beta + 1 \\ (1+\beta)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - \beta x_2 + 3x_3 = \beta + 2 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \beta x_1 + x_2 + \beta x_3 = \gamma \\ x_1 + \gamma x_3 = \beta \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ \beta x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = \gamma \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} x + z + 2v = 1 \\ 2x + 3y + 2z + 3w + \alpha v = 0 \\ y + w + v = -\gamma \\ -2x + y - 2z + w + \beta v = -2 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 2x + 2y + 4z - 2w = 0 \\ -x - y + z + \alpha w = \beta \\ x + y + 3z - 3w = \gamma \end{cases}$$

6. Discuta os seguintes sistemas complexos para todos os valores complexos dos parâmetros α, β e γ:

$$(a)\ \begin{cases} z + w = 1 \\ z + \alpha w = \beta \\ 3z - 3w = \gamma \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} iz_1 + z_3 + (1-i)z_4 = 2 \\ 2z_2 + iz_4 = 1 + i \\ iz_1 + \alpha z_3 + (3-i)z_4 = 2 \\ -\alpha z_3 - \alpha z_4 = \beta \end{cases}$$

7. Ache um sistema $A\times = b$ com duas equações e três incógnitas cuja solução geral seja

$$\times = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Ache um sistema $A\times = b$ com três equações e três incógnitas cuja solução geral seja a mesma do exercício anterior e que não tenha solução quando $b_1 + b_2 \neq b_3$.

9. Seja A uma matriz qualquer. Mostre que, se b for uma coluna de A, então o sistema $A\times = b$ é possível e indique uma solução.

Instituto Politécnico de Viseu — Escola Superior de Tecnologia

Departamento: Matemática — **Álgebra Linear e Geometria Analítica**

Curso: Engenharia Electrotécnica **Ano:** 1º **Semestre:** 1º **Ano Lectivo:** 2007/2008

Soluções da Ficha Prática nº3 - Sistemas de Equações Lineares - Eliminação de Gauss

1.a) Sistema Possível e Determinado com solução $(2,-1,1)$
1.b) Sistema Impossível
1.c) S. P. Indeterminado com conjunto solução $\{(x_3-3x_4,-1-2x_3+x_4,x_3,x_4):x_3,x_4\in \mathrm{IR}\}$
1.d) S. P. Indeterminado com conjunto solução $\left\{(\frac{43}{5}-\frac{14}{5}x_4,3-x_4,\frac{6}{5}-\frac{3}{5}x_4,x_4),x_4\in \mathrm{IR}\right\}$
1.e) Sistema Possível e Determinado com solução $(0,0,0,0)$
1.f) Sistema Impossível
1.g) S. P. Indeterminado com conjunto solução $\{(6-x_5,-5+x_5,3,-1-x_5,x_5),x_5\in \mathrm{IR}\}$
1.h) Sistema Possível e Determinado com solução $(3,5,0)$

2.a) Sistema Possível e Determinado com solução $(\frac{37}{15}-\frac{39}{15}i,-\frac{8}{15}-\frac{14}{15}i)$
2.b) S. P. Indeterminado com conjunto solução $\{(-1+2z_2,z_2):z_2\in \mathrm{C}\}$
2.c) Sistema Impossível

3.a) $\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\quad x_3\in IR$ b) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\quad x_3\in IR$

3.c) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}$ d) Impossível

4.i) $\alpha=-1$ 4.ii) $\alpha\neq 1\ \wedge\ \alpha\neq -1$ 4.iii) $\alpha=1$

5.a) S. P. D.: $\beta\neq 0\ \wedge\ \beta\neq 1$
S. P. Ind.: $\beta=0$
S. Imp.: $\beta=1$

5.b) S. P. D.: $\beta\neq 0\ \wedge\ \beta\neq -2\ \wedge\ \beta\neq 2$
S. P. Ind.: não existem valores de β
S. Imp.: $\beta=0\ \vee\ \beta=-2\ \vee\ \beta=2$

5.c) S. P. D.: $\beta \neq 1 \wedge \gamma = 1$

S. P. Ind.: $(\beta = 1 \wedge \gamma = 0) \vee \left(\gamma = 1 \wedge \beta = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$

S. Imp.: $(\beta = 1 \wedge \gamma \neq 0) \vee \left(\gamma = 1 \wedge \beta \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$

5.d) S. P. D.: $\beta \neq -2$

S. P. Ind.: $\beta = -2 \wedge \gamma = \frac{2}{5}$

S. Imp.: $\beta = -2 \wedge \gamma \neq \frac{2}{5}$

5.e) S. P. Ind.: com grau de indeterminação **1**

$(\alpha \neq 7 \wedge 18 - 6\beta + (48 + 9\beta - 3\alpha)\,\gamma = 0) \vee \left(\alpha = 7 \wedge \gamma = \frac{2}{3} \wedge \beta \neq -3\right)$

S. Imp.:

$(\alpha \neq 7 \wedge 18 - 6\beta + (48 + 9\beta - 3\alpha)\,\gamma \neq 0) \vee (\alpha = 7 \wedge \beta = -3 \wedge \gamma \in \mathrm{IR}) \vee \left(\alpha = 7 \wedge \beta \neq -3 \wedge \gamma \neq \frac{2}{3}\right)$

5.f) S. P. Ind.: com grau de indeterminação **1** se $\alpha \neq -5 \wedge \gamma = -1$

com grau de indeterminação **2** se $\alpha = 5 \wedge \beta = -3 \wedge \gamma = -1$

S. Imp.: $(\alpha = -5 \wedge \beta \neq -3) \vee (\alpha = -5 \wedge \beta = -3 \wedge \gamma \neq -1) \vee (\alpha \neq -5 \wedge \gamma \neq -1)$

6a) Sistema possível determinado se $6\beta - 6 + (\alpha - 1)\,(\gamma - 3) = 0$

Sistema impossível se $6\beta - 6 + (\alpha - 1)\,(\gamma - 3) \neq 0$

6b) Sistema impossível se $(\alpha = 0 \vee \alpha = 3) \wedge \beta \neq 0$

Sistema possível determinado se $(\alpha = 1) \vee (\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 3)$

Sistema possível indeterminado com grau de indeterminação **1** se $(\alpha = 0 \vee \alpha = 3) \wedge \beta = 0$

7) Exemplo : $\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{array} \right.$