**Departamento:** Matemática    **Álgebra Linear e Geometria Analítica**

**Curso:** Engenharia Electrotécnica    **Ano:** 1º    **Semestre:** 1º    **Ano Lectivo:** 2007/2008

**Ficha prática nº4 - Álgebra Matricial**

1. Considere as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 3 \\ 0 & 3 & 1-2i \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} -1-i & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2i & 0 \end{bmatrix}.$$
Calcule a matriz $2(A+B) \ - \ AB$.

2. Calcule os produtos $AB$ e $BA$, quando definidos, nos seguintes casos:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1+i \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2-i \\ i \end{bmatrix}$.

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 5 & 5/2 & 5/3 \end{bmatrix}$.

3. Considere as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$.

4. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Escolha uma maneira de as ordenar de tal modo que o produto das quatro matrizes esteja definido e calcule esse produto.

5. Mostre que se os produtos $AB$ e $BA$ estão ambos definidos e $A$ é do tipo $m \times n$, então $B$ é do tipo $n \times m$.

6. Que mudança se dá no produto $AB$ das matrizes $A$ e $B$ se

   (a) trocarmos as linhas $i$ e $j$ de $A$?

   (b) trocarmos as colunas $i$ e $j$ de $B$?

7. Calcule o número de multiplicações necessárias para multiplicar uma matriz $A$ do tipo $m \times n$ por uma matriz $B$ do tipo $n \times p$.

8. Sejam $A$, $B$, $C$ matrizes do tipo $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$, respectivamente. Calcule o número de multiplicações necessárias para obter o produto $ABC$. (Note que a resposta depende do modo como colocarmos os parênteses no produto $ABC$.)

9. Sendo $\alpha$ e $\beta$ números reais, calcule o produto

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

10. Calcule:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}^2 \;;\quad (b) \begin{bmatrix} 2 & i \\ 1 & 3-i \end{bmatrix}^3 \;;\quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5 \;;\quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^k$$

$$(e) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^k \;;\quad (f) \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k \; (\theta \in \mathbb{R}) \;;\quad (g) \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3.$$

11. Calcule:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}^k \quad \text{(todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero).}$$

12. (a) Verifique que as identidades algébricas $(A \overset{+}{-} B)^2 = A^2 \overset{+}{-} 2AB + B^2$, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ e $(AB)^2 = A^2B^2$ nem sempre são verdadeiras quando $A$ e $B$ são matrizes. Considere, por exemplo, os casos seguintes:

$$(a)\; A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \;,\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \;;\quad (b)\; A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \;,\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

   (b) Transforme os segundos membros das identidades anteriores de forma a obter identidades sempre válidas para $A$ e $B$ matrizes quadradas quaisquer da mesma ordem.

13. Prove que

| |
|---|
| Multiplicar uma matriz $A$ $m \times n$ à esquerda por uma matriz diagonal de elementos diagonais $\mu_1$, $\mu_2$, ..., $\mu_m$ equivale a multiplicar a 1**a. linha por $\mu_1$, a 2a. linha por $\mu_2$, etc.** |

Prove a seguir que

| |
|---|
| Multiplicar uma matriz $A$ $m \times n$ à direita por uma matriz diagonal de elementos diagonais $\mu_1$, $\mu_2$, ..., $\mu_n$ equivale a multiplicar a 1**a. coluna por $\mu_1$, a 2a. coluna por $\mu_2$, etc.** |

14. Ache todas as matrizes permutáveis com $A$, sendo:

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -3i \end{bmatrix} \ ; \quad (b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \ ; \quad (c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ ; \quad (d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

15. Prove que uma matriz que comuta com uma matriz diagonal de elementos diagonais todos distintos tem que ser ela própria diagonal.

16. Prove que uma matriz quadrada que comuta com todas as matrizes quadradas da mesma ordem tem que ser uma matriz escalar (isto é, da forma $\alpha I$ para algum $\alpha$).

17. Prove que:

| |
|---|
| O produto de duas matrizes triangulares superiores (respectivamente, inferiores) da mesma ordem é ainda uma matriz triangular superior (respectivamente, inferior). |

A que são iguais os elementos diagonais do produto neste caso?

18. Em cada uma das alíneas dê exemplo de matrizes reais $2 \times 2$ com a propriedade indicada:

(a) $A^2 = -I$; (b) $A^2 = 0$, sendo $A$ não nula;

(c) $AB = 0$, não tendo $A$ nem $B$ nenhum elemento nulo.

**Departamento:** Matemática    **Álgebra Linear e Geometria Analítica**

**Curso:** Engenharia Electrotécnica  **Ano:** 1º  **Semestre:** 1º  **Ano Lectivo:** 2007/2008

## Soluções da Ficha Prática nº4 - Álgebra Matricial

1) $\begin{bmatrix} -2-5i & -4i & 5-2i \\ -3+2i & 1-2i & 1-4i \\ -1+i & 2 & 3 \end{bmatrix}.$

2.$a$) $AB = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 12 & 6 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}$, $BA$ não está definido;

2.$b$) $AB = \begin{bmatrix} 2-i \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3+3i \\ 2-i & 0 & -1+3i \\ i & 0 & -1-i \end{bmatrix}$ (não há comutatividade);

2.$c$) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 2 \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} & \frac{35}{6} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (não há comutatividade).

3) $AB = AC = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $BC = CD = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$

4) $ADBC = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ ou $BADC = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$

6.$a$) A linha $i$ e a linha $j$ aparecem trocadas no produto $AB$;

6.$b$) A coluna $i$ e a coluna $j$ aparecem trocadas no produto $AB$.

7) $m \times n \times p$ multiplicações.

8) $m \times n \times p + m \times p \times q$ multiplicações para calcular $(AB)C$ e
$n \times p \times q + m \times n \times q$ para calcular $A(BC)$.

9) $\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$

10.$a$) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$;    10.$b$) $\begin{bmatrix} 9+7i & 7+18i \\ 18-7i & 20-18i \end{bmatrix}$;

10.$c$) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$;    10.$d$) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}$;

$10.e)\quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{se } k \text{ é par} \end{cases};$

$10.f)\quad \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}$, $\theta \in \mathrm{IR}$, $k \in \mathrm{IN}$ (provar por indução matemática);

$10.g)$ $O_{3\times 3}$.

$11)\quad \begin{bmatrix} u_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2^k & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_n^k \end{bmatrix}$, $k \in \mathrm{IN}$ (provar por indução matemática).

$12.a.i)$ Não se verificam; $12.a.ii)$ Verificam-se $(AB = BA)$;

$12.b)$ $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2$
$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$
$(AB)^2 = (AB)(AB)$

$14.a)\quad \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} :\ x, y \in C \right\};$ $14.b)\quad \left\{ \begin{bmatrix} -2x + y & -2x \\ x & y \end{bmatrix} :\ x, y \in C \right\};$

$14.c)\quad \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} :\ x, y \in C \right\}.$