Testes de Hipóteses

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Introdução

Exemplos

- Testar se mais de metade da população irá consumir um novo produto a ser lançado no mercado;
- Testar se a nova versão de um “software” é mais eficaz em média que a versão anterior
- Testar se uma nova técnica de vendas conduz a um aumento do nº de produtos vendidos

Hipóteses Estatísticas

Existem duas hipóteses envolvidas em qualquer estudo deste tipo:

- a hipótese alternativa H_1, que é, em geral, a hipótese proposta pelo investigador;
- a hipótese nula H_0, negação da hipótese anterior.

Exemplo

Para decidir se o novo processo de fabrico é melhor do que o anterior, o gestor de produção da fábrica formula as seguintes hipóteses:

- H_0 (hipótese nula): não há diferença entre os dois processos de fabrico;
- H_1 (hipótese alternativa): o novo processo de fabrico é melhor do que o anterior.

Hipóteses Estatísticas

Exemplo

Suponha que é feita uma auditoria à empresa do Sr Zé das Tintas, a qual resulta numa acusação de infracção fiscal. Obviamente, se o fiscal das finanças não conseguir juntar provas que sustentem a acusação, a empresa não é considerada culpada. As hipóteses são as seguintes:

- H_0 (hipótese nula): a empresa não cometeu uma infracção fiscal;

- H_1 (hipótese alternativa): a empresa cometeu uma infracção fiscal

Decisões

Exemplo

Nesta situação podem ser tomadas duas decisões:

- Rejeitar a hipótese H_0 - a empresa é considerada culpada, isto é, aceita-se a hipótese H_1 como sendo verdadeira;
- Não rejeitar a hipótese H_0 - não se conseguiu provar a veracidade de H_1 e como tal, não se pode rejeitar a hipótese H_0. Note que, isto não significa aceitar H_0, significa tão só, que não há provas (não há evidência) para rejeitar esta hipótese. Por isso é preferível dizer "não rejeitar H_0"a dizer "aceitar H_0".

Tipos de Erro: Erro Tipo I e Tipo II

Exemplo

Relativamente ao exemplo anterior há duas possibilidades de tomar uma decisão errada:

- a empresa é considerada culpada quando de facto não cometeu nenhuma infracção fiscal: Rejeitar H_0 sendo H_0 verdadeira;
- não se rejeita a hipótese de a empresa ser inocente, quando de facto esta cometeu uma infracção fiscal: Não rejeitar H_0 sendo H_0 falsa.

Tipos de Erro: Erro Tipo I e Tipo II

Definição

Os dois tipos de erro que podem ser cometidos são os seguintes:

- Erro tipo I: rejeitar H_0 sendo H_0 verdadeira (erro de rejeição);
- Erro tipo II: não rejeitar H_0 sendo H_0 falsa (erro de não rejeição).

Probabilidades associadas aos erros:

- $\alpha = P(\text{erro tipo I}) \hookrightarrow$ é chamado o nível de significância do teste;
- $\beta = P(\text{erro tipo II}) \hookrightarrow 1 - \beta$ é chamada a potência do teste.

Como se conduz um teste de hipóteses?

Uma vez recolhida uma amostra, observamos o valor de alguma estatística (função da amostra aleatória) cuja distribuição de probabilidade é conhecida sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira. Tal estatística é chamada estatística de teste.

A decisão a tomar será a de rejeitar H_0 ou não rejeitar H_0.

O valor de α - nível de significância do teste - e a distribuição de probabilidade da estatística do teste vão ser utilizados para definir a chamada região crítica ou região de rejeição.

Se o valor observado da estatística do teste “cair” na região crítica, decidimos rejeitar H_0; caso contrário decidimos não rejeitar H_0.

Como se conduz um teste de hipóteses?

Em resumo, o processo geral consiste no seguinte:

1. Formular a hipótese nula (H_0) e a hipótese alternativa (H_1);
2. Especificar um nível de significância;
3. Escolher a estatística a usar e encontrar a sua distribuição de probabilidade sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira;
4. Determinar a região de rejeição;
5. Calcular o valor observado da estatística do teste;
6. Decidir rejeitar H_0 ou não rejeitar H_0.

Exemplo

Exemplo

O director comercial de uma cadeia de lojas pretende comparar duas técnicas de vendas, A e B, para o mesmo produto.

Utilizando a técnica de vendas A a quantidade de produto vendido por dia é em média de 816 Kg com um desvio padrão de 45 Kg. Adoptando a nova técnica de vendas B espera-se aumentar a quantidade de vendas diárias.

Para testar tal hipótese registou-se a quantidade diária de vendas do produto durante 50 dias, obtendo-se um valor médio de 839 Kg.

Pode aceitar-se a hipótese ao nível de significância de 0.01?

Exemplo

Seja

$X \equiv$ " quantidade de produto vendida num dia com a técnica de vendas B"

X tem média μ e desvio padrão $\sigma = 45$ Kg.

Hipóteses estatísticas:

- H_0: $\mu = 816$ Kg
  não há alteração na quantidade média diária de vendas;
- H_1: $\mu > 816$ Kg
  a quantidade média diária de vendas aumenta.

Exemplo

Pelo Teorema Limite Central,

$$\overline{X} \dot{\sim} N\left(\mu, \frac{45^2}{50}\right) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{45/\sqrt{50}} \dot{\sim} N(0,1)\,.$$

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, $\mu = 816$ Kg, logo a estatística de teste é

$$\overline{X} \dot{\sim} N\left(816, \frac{45^2}{50}\right) \quad \text{ou} \quad Z = \frac{\overline{X} - 816}{45/\sqrt{50}} \dot{\sim} N(0,1)\,.$$

Exemplo – Região Crítica

Para que valores da estatística do teste será de rejeitar a hipótese nula?

Quanto maior for o valor da média amostral ($\overline{x}$), relativamente a 816, mais credível se torna a hipótese H_1 e consequentemente, mais a decisão se encaminha no sentido de rejeitar H_0.

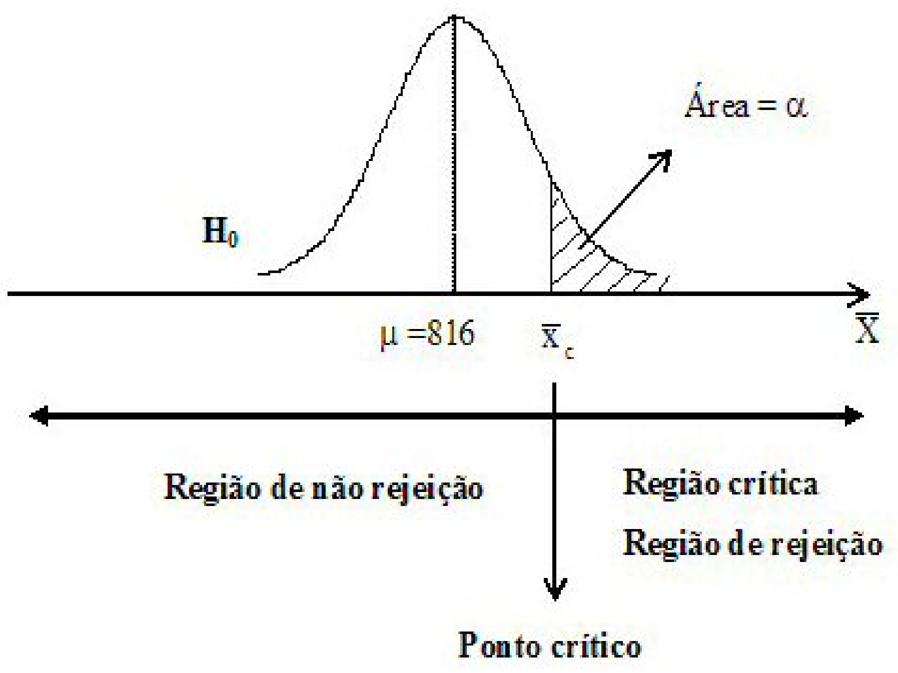
Então, fixando um ponto $\overline{x}_c$ superior a 816, a regra de decisão será:

$$\text{rejeitar } H_0 \text{ se } \overline{x} \geq \overline{x}_c\text{; caso contrário, não rejeitar } H_0.$$

A $\overline{x}_c$ dá-se o nome de ponto crítico.

A região crítica (região de rejeição da hipótese nula) é então:

$$[\overline{x}_c, +\infty[\,.$$



Distribuição da estatística de teste $\overline{X}$ quando H_0 é verdadeira.

Exemplo – Região Crítica

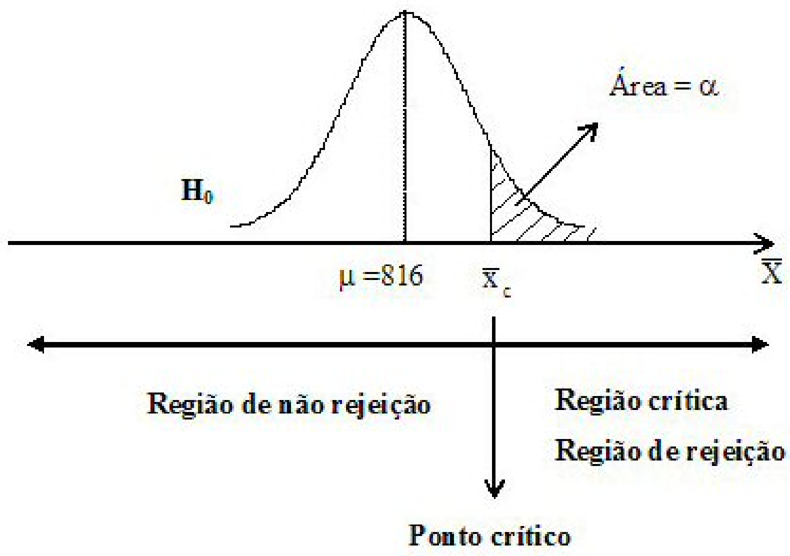
Sendo a hipótese H_0 verdadeira, a probabilidade de a estatística de teste assumir valores na região de rejeição é pequena; estes valores são mais plausíveis se a hipótese H_1 for verdadeira.

Fixámos o nível de significância em 0.01. Isto significa que ao rejeitarmos a hipótese H_0 podemos estar a cometer um erro tipo I com probabilidade 0.01. Por outras palavras, a chance de rejeitarmos a hipótese $H_0 : \mu = 816$ quando de facto $\mu = 816$, é quantificada em 1%.

Vamos calcular o ponto crítico $\overline{x}_c$ associado a este nível de significância.

Exemplo – Região Crítica

$$\begin{aligned}\alpha = 0.01 &= P(\text{Erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira})\\ &= P(\overline{X} \geq \overline{x}_c | \mu = 816) = \text{área da região sombreada}\,.\end{aligned}$$



Exemplo – Região Crítica

$$P(\overline{X} \geq \overline{x}_c|\mu = 816) = 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\frac{\overline{X} - 816}{45/\sqrt{50}} \geq \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) = 0.0$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) = 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad P\left(Z \leq \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) = 0.99$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}} = 2.326 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x}_c = 830.8$$

Ponto crítico: $\overline{x}_c = 830.8$ Região crítica: $[830.8, +\infty[$

Exemplo – Decisão

Como na amostra foi observada uma média amostral $\overline{x} = 839Kg$, que cai dentro da região crítica ($\overline{x} = 839 \geq 830.8$), então a decisão é a de rejeitar a hipótese H_0.

Concluímos que há evidência de que a nova técnica de vendas B conduz a um aumento das vendas médias diárias, ao nível de significância de 0.01.

Neste caso, diz-se que a média observada na amostra é significativamente diferente de 816.

Exemplo – Decisão

Exemplo

Suponha que a média amostral observada nos 50 dias era de 800 Kg. Para o mesmo nível de significância qual seria agora a decisão a tomar?

Neste caso a média observada na amostra não cai na região crítica ($\overline{x} < 830.8$), logo a decisão será a de não rejeitar H_0.

Não podemos concluir que nova técnica de vendas B aumente as vendas médias diárias.

A média observada na amostra não é significativamente diferente de 816.

Podemos, então, estar a cometer um erro tipo II (erro de não rejeição).

Interessa pois examinar $\beta = P(\text{erro tipo II})$.

Exemplo – Probabilidade de Erro Tipo II

$$\begin{aligned} \beta = P(\text{erro tipo II}) &= P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) \\ &= P(\overline{X} < \overline{x}_c | \mu > 816) \end{aligned}$$

O valor de β depende do valor da média populacional μ.

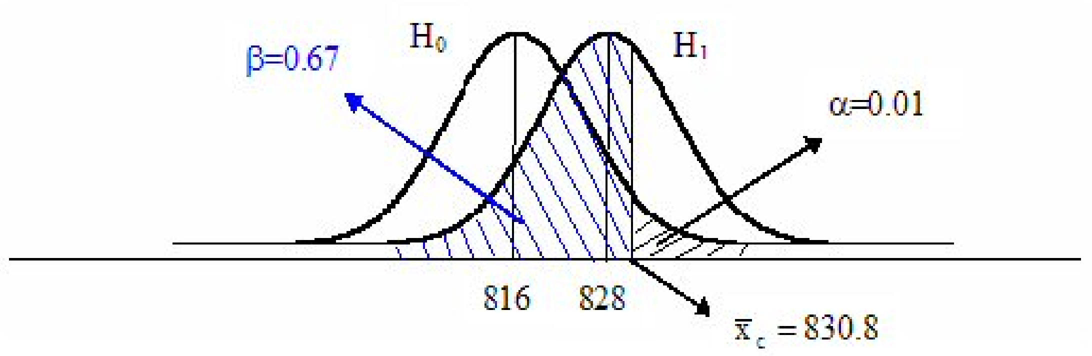
Para calcular o valor de β há necessidade de especificar um valor particular de μ de acordo com a hipótese alternativa.

Exemplo

Ainda admitindo que a média amostral observada nos 50 dias foi de 800 Kg, compare as probabilidades de ocorrência de erro tipo II, quando especificamos os valores $\mu = 828$ e $\mu = 832$ para a hipótese alternativa.

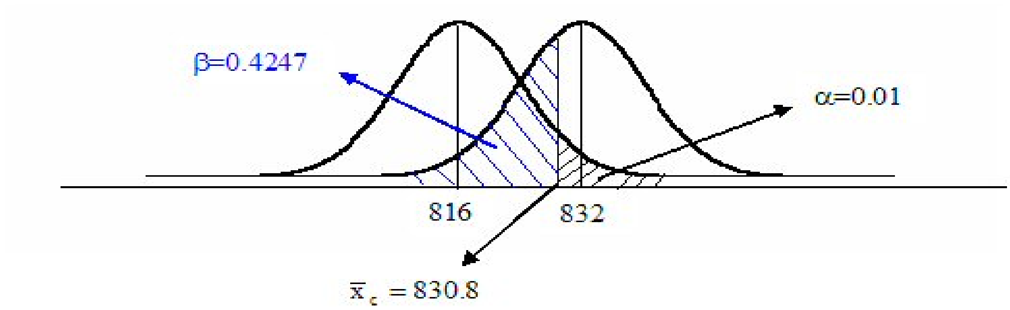
Exemplo – Probabilidade de Erro Tipo II

$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$$
$$= P(\overline{X} < \overline{x}_c | \mu = 828) = P\left(\frac{\overline{X} - 828}{45/\sqrt{50}} < \frac{830.8 - 828}{45/\sqrt{50}}\right)$$
$$= P(Z < 0.44) = 0.67$$



Exemplo – Probabilidade de Erro Tipo II

$$\beta = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) = P(\overline{X} < \overline{x}_c | \mu = 832)$$
$$= P\left(\frac{\overline{X} - 832}{45/\sqrt{50}} < \frac{830.8 - 832}{45/\sqrt{50}}\right) = P(Z < -0.19) = 0.4247$$



O valor de β diminui há medida que aumenta a diferença entre valor de μ especificado para a hipótese H_1 e o valor de μ da hipótese H_0.

Exemplo – Probabilidade de Erro Tipo II

A probabilidade de erro tipo II também depende do tamanho da amostra.

Aumentando a dimensão da amostra de $n = 50$ para $n = 100$, passamos a ter, sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira

$$\overline{X} \dot{\sim} N\left(816, 45^2/100\right) .$$

É necessário tornar a calcular o ponto crítico e a região crítica.

$$\alpha = P(\overline{X} \geq \overline{x}_c | \mu = 816) \Leftrightarrow P\left(\frac{\overline{X} - 816}{45/\sqrt{100}} \geq \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{100}}\right) = 0.01$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{100}}\right) = 0.01 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{100}}\right) = 0.99$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{100}} = 2.326 \Leftrightarrow \overline{x}_c = 826.5$$

A região crítica é então: $[826.5, +\infty[$

Exemplo – Probabilidade de Erro Tipo II

Supondo que o verdadeiro valor da produtividade média é 828, a probabilidade de se cometer um erro tipo II é agora:

$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$$

$$= P(\overline{X} < \overline{x}_c | \mu = 828) = P\left(\frac{\overline{X} - 828}{45/\sqrt{100}} < \frac{826.5 - 828}{45/\sqrt{100}}\right)$$

$$= P(Z < -0.33) = 0.3707$$

Note que, para $n = 50$ encontrámos $\beta = 0.67$ (considerando igualmente $\mu = 828$ na hipótese alternativa).

Ao aumentar o tamanho da amostra, reduzimos a probabilidade de se cometer um erro tipo II.

Exemplo – variação de α e β

Fixando a dimensão da amostra, não é possível reduzir simultaneamente α e β.

Exemplo

Na hipótese alternativa de $\mu = 828$ e para um nível de significância igual a 0.05, calcule o valor de β. Que conclusões pode tirar acerca da variação de α e β?

Calculemos o ponto crítico para $\alpha = 0.05$.

$$\alpha = P(\overline{X} \geq \overline{x}_c | \mu = 816) \Leftrightarrow P\left(\frac{\overline{X} - 816}{45/\sqrt{50}} \geq \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) = 0.05$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}}\right) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{500}}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{x}_c - 816}{45/\sqrt{50}} = 1.645 \Leftrightarrow \overline{x}_c = 826.47$$

Exemplo – variação de α e β

Agora a probabilidade de erro tipo II para o valor alternativo $\mu = 828$ é:

$$\beta = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) = P(\overline{X} < \overline{x}_c | \mu = 828)$$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - 828}{45/\sqrt{50}} < \frac{826.47 - 828}{45/\sqrt{50}}\right) = P(Z < -0.24) = 0.4052$$

Portanto, ao aumentarmos α de 0.01 para 0.05, mantendo $n = 50$, β (a probabilidade de não rejeitar H_0 quando $\mu = 828$), diminuiu de 0.67 para 0.4052.

Se tentarmos reduzir a probabilidade de ocorrência de um tipo de erro, aumenta-se a probabilidade de ocorrência do outro.

Testes Bilaterais e Unilaterais

Sem perda de generalidade vamos considerar que o parâmetro em teste é a média de uma população, μ.

As hipóteses podem cair numa das seguintes situações gerais:

$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$
Teste unilateral à direita	Teste unilateral à esquerda	Teste bilateral

Testes Bilaterais e Unilaterais

1º caso - Teste unilateral à direita

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array} \quad \overset{1^{\text{o}} \text{ caso reduz-se a}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}$$

Os valores da estatística de teste que nos levarão a rejeitar H_0 e concluir que $\mu > \mu_0$, também nos levarão a rejeitar qualquer valor menor do que μ_0.

Da mesma forma:

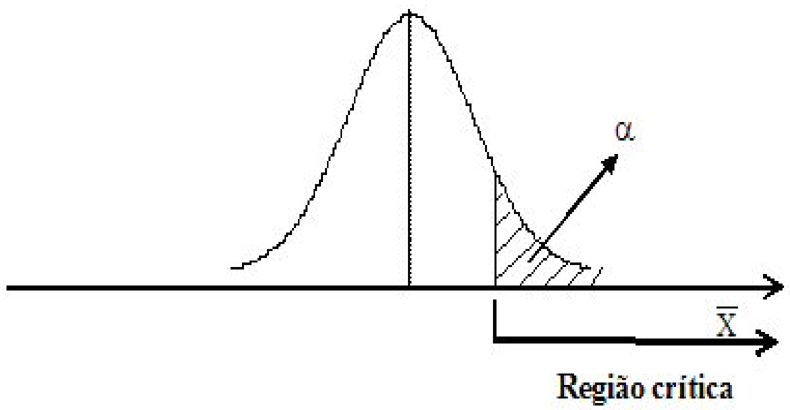
2º caso - Teste unilateral à esquerda

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array} \quad \overset{2^{\text{o}} \text{ caso reduz-se a}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}$$

Testes Bilaterais e Unilaterais

1º caso - Teste unilateral à direita

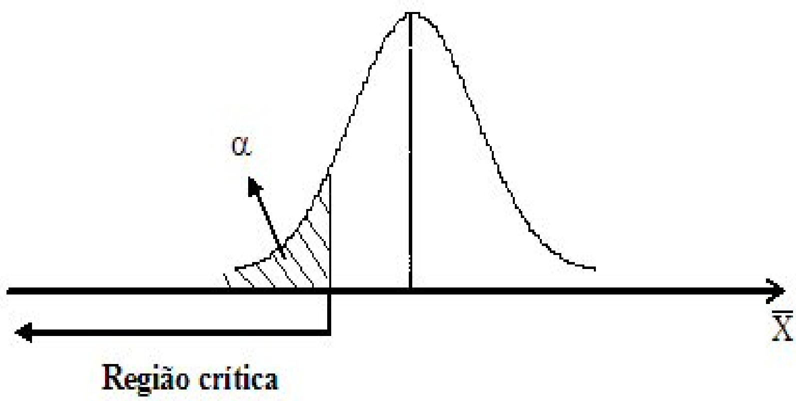
$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$



Testes Bilaterais e Unilaterais

2º caso - Teste unilateral à esquerda

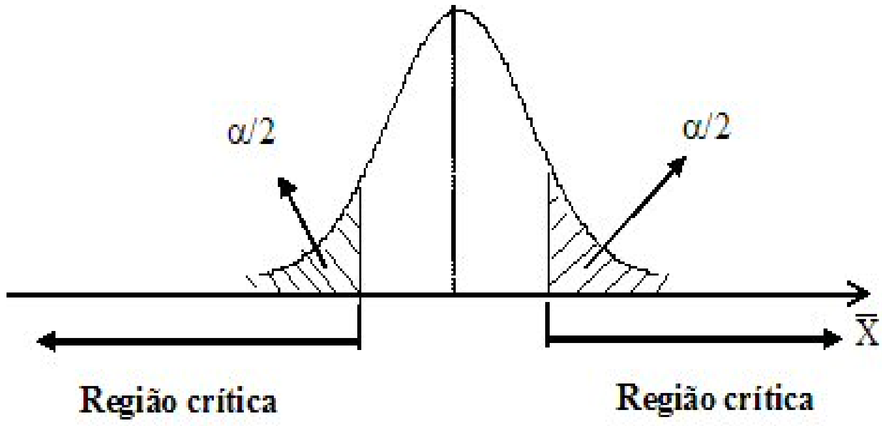
$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$



Testes Bilaterais e Unilaterais

3º caso - Teste bilateral

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$



Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para μ

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} \mu_0$$

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, e se

- a população é normal e a variância é conhecida,

  Estatística de teste: $\overline{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

  Dado que a distribuição da estatística de teste, sob H_0, é normal, é usual designar o teste por Teste Z.

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para μ

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, e se

- a população é normal, a variância é desconhecida e a amostra é pequena

$$\text{Estatística de teste: } T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Dado que a distribuição da estatística de teste, sob H_0, é t-Student, é usual designar o teste por Teste t-Student.

- a variância é desconhecida e a amostra é grande,

$$\text{Estatística de teste: } Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

Denomina-se Teste Z.

- a variância é conhecida e a amostra é grande

$$\text{Estatística de teste: } \overline{X} \stackrel{\cdot}{\sim} N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{ou} \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1)$$

Denomina-se Teste Z.

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = (\mu_1 - \mu_2)_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} (\mu_1 - \mu_2)_0$$

onde $(\mu_1 - \mu_2)_0$ é o valor particular a ser testado. Este pode ser qualquer valor, embora o mais comum seja zero, vindo

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu_1 \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} \mu_2$$

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ **Amostras independentes**

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, e se

- as populações são normais e as variâncias são conhecidas

$$\text{Estatística de teste: } \overline{X_1} - \overline{X_2} \sim N\left((\mu_1 - \mu_2)_0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$\text{ou } \; Z = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

- as amostras são grandes e as variâncias conhecidas

$$\text{Estatística de teste: } \overline{X_1} - \overline{X_2} \mathrel{\dot{\sim}} N\left((\mu_1 - \mu_2)_0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$\text{ou } \; Z = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \mathrel{\dot{\sim}} N(0,1)$$

Estes testes são usualmente designados por Testes Z.

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ **Amostras independentes**

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, sendo as populações normais, as variâncias desconhecidas, as amostras pequenas e, ainda,

- as variâncias iguais

$$\text{Estatística de teste: } T = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-1}$$

- as variâncias diferentes

$$\text{Estatística de teste: } T = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\upsilon$$

com $\upsilon = \frac{[S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2]^2}{\frac{[S_1^2/n_1]^2}{n_1-1} + \frac{[S_2^2/n_2]^2}{n_2-1}}$

(na prática o procedimento habitual é tomar o maior n$^{\text{o}}$ inteiro não superior a υ.)

Estes testes são usualmente designados por Testes T.

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ **Amostras independentes**

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira, e se

- variâncias são desconhecidas e as amostras grandes

Estatística de teste: $Z = \dfrac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$

Denomina-se Teste Z.

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ **Amostras emparelhadas**

Exemplo

Queremos comparar dois tratamentos, A e B, para a mesma doença. Podemos sujeitar um grupo de pacientes ao tratamento A e outro grupo ao tratamento B, escolhendo os pacientes de modo a que as amostras sejam aleatórias e independentes uma da outra.

Este procedimento pode não ser o mais adequado

a reacção de um paciente ao um dado tratamento é muito influenciado por um conjunto de características pessoais. Assim, as diferenças encontradas nos dois grupos, podem estar relacionadas não apenas com os tratamentos, mas também com as características pessoais dos pacientes sujeitos a cada tratamento.

Parece mais razoável sujeitar os mesmos pacientes aos dois tratamentos, obtende-se uma amostra formada por pares de observações – amostra emparelhada.

Exemplo

As idades de 15 casais, constituem uma amostra de observações emparelhadas. Note que a idade de um dos elementos do casal não é independente da idade do outro.

Exerc. 27

O gabinete de marketing de uma cadeia de lojas pretende saber se uma determinada campanha promocional irá aumentar as vendas. Para isso selecciona 10 pares de lojas, cada par constituído por lojas com características idênticas (no tamanho, densidade populacional da área onde está integrada, vendas mensais médias, etc.). A campanha promocional é feita numa loja de cada par, sendo esta escolhida ao acaso. Dispomos portanto de um conjunto de 10 observações emparelhadas.

Quando as amostras de que dispomos são emparelhadas não podemos usar as estatísticas de teste vistas anteriormente. Então como devemos proceder?

Exerc. 27

Pretende-se comparar o volume de vendas de uma loja onde não é feita a campanha promocional (X_1) com o volume de vendas de uma loja onde é feita a campanha (X_2).

O volume de vendas é relativo a um determinado período de tempo.

Dispomos de 10 pares de observações independentes, $(x_{i1}, x_{i2}),\ i = 1, ..., 10$, (cada par é independente de outro qualquer).

Hipóteses: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs. $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ **Amostras emparelhadas**

Neste tipo de situações definimos uma nova variável aleatória: $D = X_1 - X_2$

Dispomos de uma amostra aleatória da v.a. D:

$$(x_{i1}, x_{i2}), \; i = 1, ..., 10$$

Como

$$\mu_D = E(D) = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = \mu_1 - \mu_2 \, ,$$

as hipóteses

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

podem-se escrever da seguinte maneira

$$H_0 : \mu_D = 0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \mu_D < 0$$

Reduzimos um teste de hipótese para a comparação de duas médias

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para $\mu_1 - \mu_2$ **Amostras emparelhadas**

Exercício 27: *Solução*

R.C.= $]-\infty, -4.781]$.

Valor da estatística teste para a amostra recolhida: $-2.32 \notin R.C.$.

Assim, a hipótese H_0 não é rejeitada, ao nível de significância de 0.0005.

A média observada (-1.98) não é significativamente diferente de zero.

Então, para este nível de significância, não podemos concluir que a campanha promocional contribua para o aumento das vendas.

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para σ

$$H_0 : \sigma = \sigma_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} \sigma_0$$

Se a população é normal e sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira,

$$\text{Estatística de teste: } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para σ_1/σ_2

$$H_0 : \sigma_1/\sigma_2 = (\sigma_1/\sigma_2)_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_1/\sigma_2 \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} (\sigma_1/\sigma_2)_0$$

onde $(\sigma_1/\sigma_2)_0$ é o valor particular a ser testado. Este pode ser qualquer valor, embora o mais comum seja um. Neste caso teremos

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma_1 \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} \sigma_2$$

Se ambas as populações são normais, sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira,

$$\text{Estatística de teste: } \frac{S_1^2}{S_2^2}\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)_0 \sim F^{n_1-1}_{n_2-1}$$

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para p

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : p \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} p_0$$

Se a amostra é pequena ($n \leq 30$)

$$X \equiv \text{n.º de sucessos na amostra de tamanho } n$$

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeiro,

$$\text{Estatística de teste: } X \sim B(n, p_0)$$

Se a amostra é suficientemente grande ($n > 30$)

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeiro,

$$\text{Estatística de teste: } \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \stackrel{\cdot}{\sim} N(0, 1)$$

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para $p_1 - p_2$

$$H_0 : p_1 - p_2 = (p_1 - p_2)_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : p_1 - p_2 \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} (p_1 - p_2)_0$$

onde $(p_1 - p_2)_0$ é o valor particular a ser testado. Este pode ser qualquer valor, embora o mais comum seja zero. Neste caso teremos

$$H_0 : p_1 = p_2 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : p_1 \begin{array}{c} > \\ < \\ \neq \end{array} p_2$$

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para $p_1 - p_2$

Sabe-se que para amostras de grande dimensão, a distribuição amostral de $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ é tal que:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)_0}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \mathrel{\dot{\sim}} N(0,1)$$

sob o pressuposto de H_0 ser verdadeiro, onde $q_1 = 1 - p_1$ e $q_2 = 1 - p_2$.

A variável Z não é uma estatística pois depende das proporções populacionais desconhecidas p_1 e p_2.

Para contornar este problema substituímos p_1 e p_2 pelos seus estimadores $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$.

Sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira vem:

Estatística de teste: $Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}} \mathrel{\dot{\sim}} N(0,1)$

Escolha da Estatística Adequada: Testes de hipóteses para $p_1 - p_2$

Existe um procedimento alternativo quando o valor a ser testado é zero, i. e., quando a hipótese nula é $H_0 : p_1 = p_2$.

Neste caso, se H_0 é verdadeira, $p_1 = p_2 = p$.
Embora esta proporção seja desconhecida, esta pode ser estimada por

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 - n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}.$$

Substituindo p_1 e p_2 por $\hat{p}$ em Z vem, sob o pressuposto de H_0 ser verdadeira,

Estatística de teste: $Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \mathrel{\dot{\sim}} N(0,1)$