
PROBLEMAS (7º ANO)

PROBLEMA: NÚMEROS RACIONAIS

1. Os números de Fibonacci podem ser definidos por recorrência em que cada termo, com exceção dos dois primeiros termos, é a soma dos dois termos que o precedem, isto é,

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

Assim,

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2;$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3;$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5;$$

...

São inúmeras as propriedades matemáticas que os números de Fibonacci satisfazem.

Seguidamente são apresentadas duas dessas propriedades.

PROPRIEDADE 1: Dados dois números inteiros positivos m e n , o número de Fibonacci F_m divide o número de Fibonacci $F_{m \times n}$.

PROPRIEDADE 2: Dados dois números inteiros positivos m e n , o máximo divisor comum dos números de Fibonacci F_m e F_n coincide com o número de Fibonacci F_d , onde d é o máximo divisor comum entre m e n . Isto é, $m.d.c(F_m, F_n) = F_{m.d.c(m, n)}$.

Tendo em conta as propriedades anteriores, justifica o valor lógico das seguintes afirmações:

- (a) Os números de Fibonacci F_{15} e F_9 são primos entre si.
- (b) O número de Fibonacci F_{234} é um múltiplo do número de Fibonacci F_6 .
- (c) O mínimo múltiplo comum entre os números de Fibonacci F_7 e F_{14} é $F_7 \times F_{14}$.
- (d) O número de Fibonacci F_{111} é par.

PROBLEMA: FUNÇÕES

Por repetição, utilizando as letras, F I B O N A C C I, foi construída a sucessão

F I B O N A C C I F I B O N A C C I F I B O N A C C I ...

1. Considera a função f que a cada número natural, n , faz corresponder a letra correspondente ao termo de ordem n da sucessão referida.

(a) Determina $f(5)$ e $f(89)$.

(b) Seja g uma função de domínio $D = \{5, 89, 233\}$ e tal que $g(x) = f(x)$ (para x pertencente ao domínio). Admitindo que o contradomínio de g coincide com o seu conjunto de chegada, representa a função g por um diagrama de setas.

(c) Comenta a seguinte afirmação:

“a correspondência que, a cada letra (correspondente ao termo de ordem n da sucessão referida), faz corresponder o número natural n , é uma função.”

2. Considera todas as funções

$$h: \{F, I, B, O, N, A, C\} \longrightarrow \{C, I\}$$

de domínio $\mathcal{D} = \{F, I, B, O, N, A, C\}$ e conjunto de chegada $\mathcal{E} = \{C, I\}$.

Quantas funções existem?

3. Considera a sequência formada pelos cinco primeiros termos da sucessão de Fibonacci (F_n), isto é, 1, 1, 2, 3, 5.

Seja f a função afim de coeficiente da variável $-\frac{F_2}{F_4}$ e termo independente $-F_1$, e a função linear h , definida por

$$h(x) = \frac{F_1}{F_3} - \frac{F_2}{F_4} \left(x + \frac{F_4}{F_3} \right) + \frac{F_3}{F_4} x.$$

(a) Escreve as funções f e h na forma canónica.

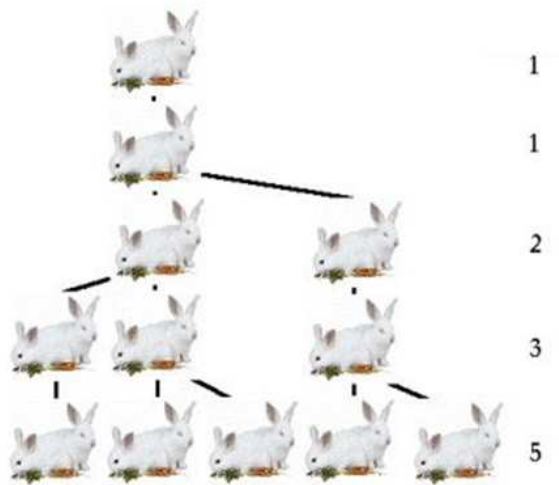
(b) Mostra que $f + h$ é uma função constante.

(c) Determina o valor exato de $\sqrt[3]{((f + h) \times h) \left(\frac{1}{9} \right)}$.

PROBLEMA: SEQUÊNCIAS, SUCESSÕES E REGULARIDADES

1. Fibonacci analisou no seu livro *Liber Abaci* (1202) o seguinte problema:

Um homem colocou um casal de coelhos num local cercado por todos os lados. Quantos casais de coelhos podem ser gerados a partir desse casal ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada casal gera um novo casal, que se torna produtivo no segundo mês de vida?



Assumindo que todos os coelhos são imortais, responda às seguintes questões:

- (a) Quantos casais de coelhos existem no 7º mês?
- (b) Qual a solução do problema de Fibonacci?

2. Considere os 7 termos consecutivos da sucessão de Fibonacci

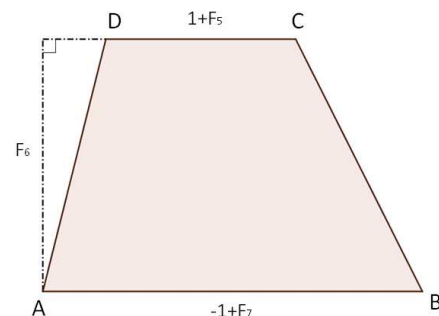
$$\dots (A) \quad 21 \quad 34 \quad (B) \quad 89 \quad 144 \quad (C) \quad \dots$$

Determina os termos (A) , (B) e (C) .

PROBLEMA: TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

Considera a sucessão de Fibonacci (F_n), isto é, $1, 1, 2, 3, 5 \dots$

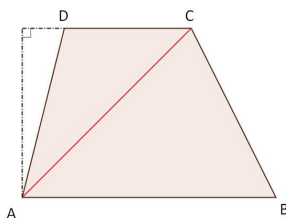
1. Na figura está representado um trapézio $[ABCD]$, cujas medidas dos lados estão relacionadas com os termos da sucessão de Fibonacci (F_n). Atendendo aos dados da figura, determina a medida da área do trapézio, utilizando os seguintes processos:



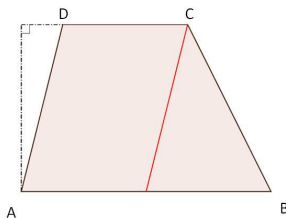
- (a) Aplicando a fórmula da área do trapézio:

$$\frac{\text{base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{altura}$$

- (b) Decompondo em triângulos.



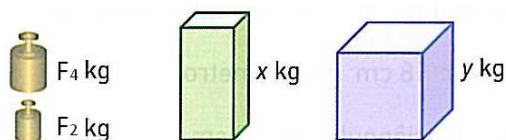
- (c) Decompondo num paralelogramo e num triângulo.



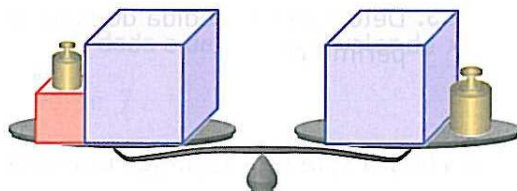
2. Mostra que qualquer reta que passa pelo ponto de interseção das diagonais do paralelogramo $[ADCE]$ (da questão anterior) divide-o em dois polígonos com a mesma medida de área.

PROBLEMA: EQUAÇÕES

1. Considera os seguintes objetos e as respectivas massas, em quilogramas, onde F_2 e F_4 representam, respetivamente, o segundo e quarto termos da sucessão de Fibonacci.

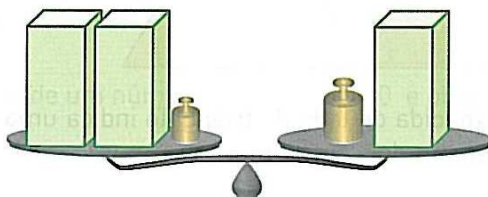


- (a) Descreve, passo a passo, como podes determinar a massa do objeto vermelho representado na balança.

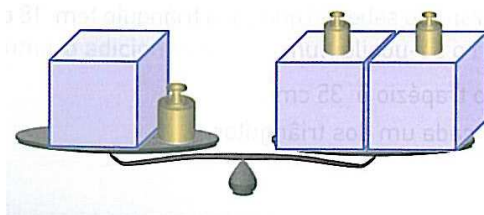


- (b) Representa, através de uma equação, o equilíbrio de cada uma das balanças representadas a seguir e resolve essa equação.

i.



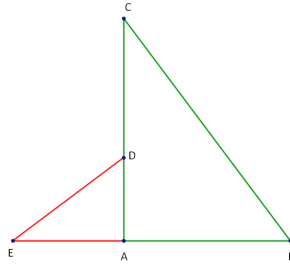
ii.



PROBLEMA: SEMELHANÇAS

1. Na figura estão representados dois triângulos retângulos, cujas medidas dos lados estão relacionadas com os termos da sucessão de Fibonacci (F_n), e são dadas (em centímetros) por

$$\overline{AD} = F_4, \overline{DC} = F_5, \overline{EA} = 2F_3, \overline{AB} = 2F_4 \text{ e } \overline{CB} = 2F_5$$

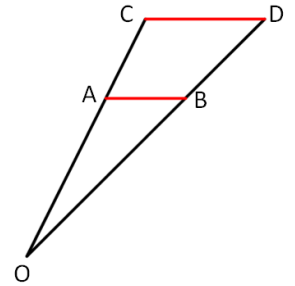


Atendendo que AC é perpendicular a AE , responde às seguintes questões:

- Mostra que o triângulo $[ABC]$ é semelhante ao triângulo $[ADE]$.
- Determina a medida do lado $[DE]$.

2. Sobre a figura ao lado, sabe-se que:

- $[CD]$ é a imagem de $[AB]$ por uma homotetia de centro O e razão r
- $\overline{OA} = F_4$ (4º termo da sucessão de Fibonacci)
- $\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{\overline{OA}}{2}$
- $\overline{BD} = F_3$ (3º termo da sucessão de Fibonacci)



Determina:

- a razão r de homotetia;
- o perímetro do trapézio $[CABD]$;
- o perímetro do triângulo $[AOB]$.

PROBLEMA: TRATAMENTO DE DADOS

1. Após algum tempo a economizar, o Francisco abriu o mealheiro e fez a contagem das moedas que lá tinha colocado. Denotando por (F_n) a sucessão de Fibonacci, o Francisco registou a seguinte informação:

- F_4 moedas de 10 centímos.
- F_5 moedas de 20 centímos.
- F_3 moedas de 50 centímos.
- F_6 moedas de 1 euro.
- F_7 moedas de 2 euros.



- (a) Qual o número total de moedas que o Francisco tinha no mealheiro?
- (b) Calcula a quantia em euros que o Francisco tinha no mealheiro.
- (c) Determina a percentagem correspondente a cada moeda.
- (d) Organiza os dados numa tabela de frequências absolutas e relativas.
- (e) Constrói o diagrama circular que representa a distribuição das moedas no mealheiro do Francisco.
- (f) Indica a moeda que apareceu mais vezes. Que nome lhe dás?
- (g) Em relação ao conjunto dos dados correspondentes ao valor, em euros, de cada moeda, determina:
 - i. a média, apresentando o resultado arredondado às centésimas.
 - ii. a mediana.