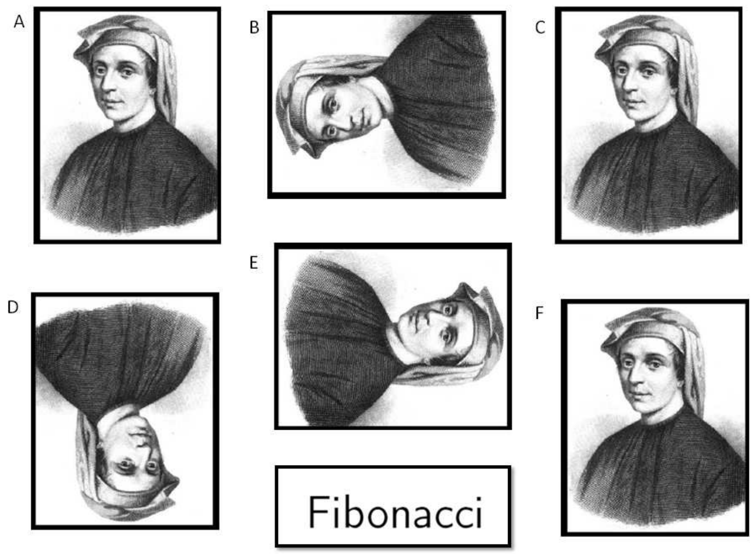
PROBLEMAS (8^{o} ANO)

Problema: Isometrias

Na figura está representado um painel com imagens de Fibonacci, todas geometricamente iguais.



1. Recorrendo apenas às imagens de Fibonacci da figura e a translações, indica como obter a imagem F a partir da imagem A.

2. Seja $T_{\overrightarrow{a}}$ a translação que aplica a imagem A na imagem C e $T_{\overrightarrow{b}}$ a translação que transforma a imagem C na imagem F. Qual é o vetor associado à translação que transforma a imagem A na imagem F?

3. Indica uma transformação geométrica que transforme a imagem A na imagem D.

4. Indica, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) Existe uma translação que transforme a figura A na figura E.

   (b) Existe uma relexão que transforme a figura A na figura D.

   (c) Existe uma rotação que transforme a figura A na figura E.

5. Retira três letras às palavra FIBONACCI de forma a obteres uma palavra com um único eixo de simetria.

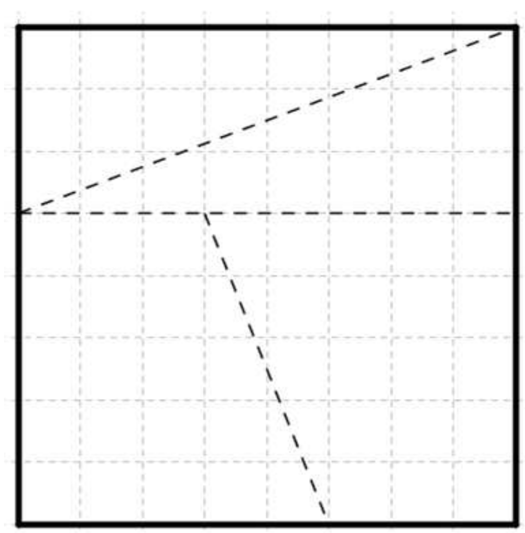
Problema: Números racionais

1. Nas compras efetuadas para uma festa de aniversário, $\frac{3}{5}$ da despesa foi em doces, $\frac{1}{4}$ em bebidas e o restante em artigos diversos.

   (a) Que fração da despesa corresponde à compra de artigos diversos?

   (b) O total da despesa foi de 240 euros. Mostra que o valor gasto na compra de doces corresponde a um número de Fibonacci.

2. Na figura está representado um painel quadrangular, cuja medida do lado é um número de Fibonacci.



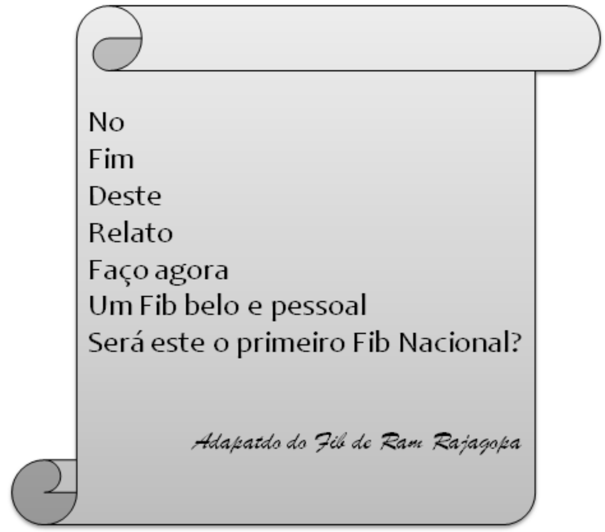
   (a) Escreve a fração que corresponde à parte do painel representada por um dos triângulos.

   (b) Que fração do painel corresponde um dos trapézio?

   (c) Se quiseres pintar quadrículas do quadrado de modo que a parte pintada corresponda a $\frac{3}{4}$ da superfície, quantos quadrados deves pintar?

Problema: Planeamento estatístico

"Poesias de Fibonacci", ou simplesmente Fibs, são poemas em que o número de sílabas de cada verso é dado pela sequência de Fibonacci. Num concurso de poesia o João adaptou o Fib de Ram Rajagopa (poema ao lado). Na aula de matemática, a professora propôs aos diversos grupos de trabalho, que utilizassem o poema para:



- especificar um problema;
- recolher dados;
- organizar/analisar;
- interpretar;

O grupo do João, constituído por cinco elementos, especificou o seguinte problema:

" Das cinco vogais, há alguma cuja utilização se destaque da das outras na escrita do poema?"

1. Dá exemplo de questões que te pareçam importantes para o processo de resolução do problema.

2. Indica uma estratégia para a recolha de dados relativos às questões colocadas e organiza-os numa tabela.

3. Analisa e interpreta a informação apresentada na tabela e apresenta conclusões.

4. Um outro grupo especificou o seguinte problema:

   " Como é feita a distribuição do número de palavras por linha?"

   Faz o planeamento de um estudo estatístico para responder à questão colocada.

   Sugestão: Começa por apresentar uma tabela que facilite a contagem e analisa os dados em termos de amplitude, média, moda, mediana e quartis. De seguida elabora uma breve conclusão.

Problema: Funções

Considera a sequência formadas pelos sete primeiros termos da sucessão de Fibonacci (F_n),

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13.$$

1. De uma função afim, f , sabe-se que a reta r que contém o seu gráfico cartesiano:

   - passa pelo ponto de coordenadas $(0, F_4)$
   - é paralela à reta s que contém o gráfico da função linear g, definida por $g(x) = -F_3 x$.

   Diz, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (A) $f(x) = F_4 x - F_3$ é a expressão algébrica da função f.

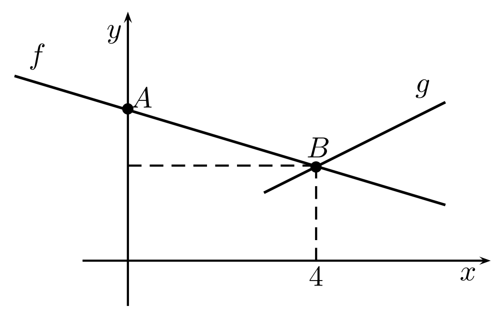
   (B) O ponto de coordenadas $(-F_1, F_5)$ pertence à reta r.

   (C) f é uma função de proporcionalidade direta.

   (D) Se F_1 pertence ao domínio de f, então também pertence ao contradomínio de f.

2. Considera duas funções f e g, cujas representações gráficas estão a seguir.

   A representação gráfica de f interseta o eixo das ordenadas no ponto A e interseta a representação gráfica de g no ponto B. Admite que a representação gráfica de g é uma reta que contém a representação gráfica de uma função de proporcionalidade direta, e que a expressão algébrica da função f é



$$f(x) = \frac{1}{F_4}(-x + F_7 - 3) \ .$$

   (a) Quais as coordenadas dos pontos A e B?

   (b) Determina a expressão algébrica da função g.

   (c) Seja C o ponto de interseção da representação gráfica de g com o eixo das abcissas. Determina a medida da área do triângulo $[ABC]$. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

PROBLEMA: EQUAÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES

---

1. A Margarida está a ler um livro que fala dos números de Fibonacci e suas aplicações.

   No primeiro dia leu 60 páginas, no segundo dia leu $\frac{1}{3}$ do número de páginas do livro, ficando por ler 25% do total de páginas.

   (a) Mostra que o número total de páginas do livro é um número de Fibonacci.

   (b) Determina o número de páginas do livro que a Margarida leu em cada dia.

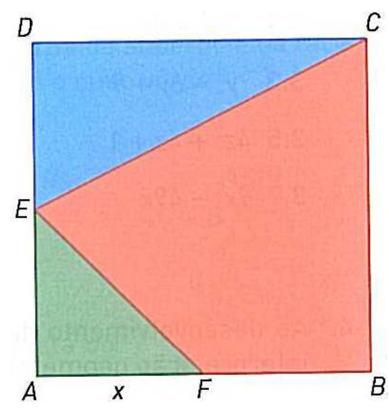
2. Sobre dois números de Fibonacci sabe-se que:

   - a sua soma é 15;
   - um deles é o sêxtuplo do outro mais 1.

   (a) Escreve um sistema de equações que traduza o problema.

   (b) Determina os números de Fibonacci em questão.

3. Na figura está representado um quadrado $ABCD$ decomposto em três polígonos.

   Sabe-se que:

   - F é o ponto médio do lado AB;
   - E é o ponto médio do lado AD;
   - $\overline{AF} = x$.

   (a) Mostra que a área do quadrilátero $BCEF$ é dada pela expressão $\frac{5x^2}{2}$.

   (b) Determina a medida do lado do quadrado $ABCD$, se a medida da área do quadrilátero $BCEF$ for o número de Fibonacci 233.

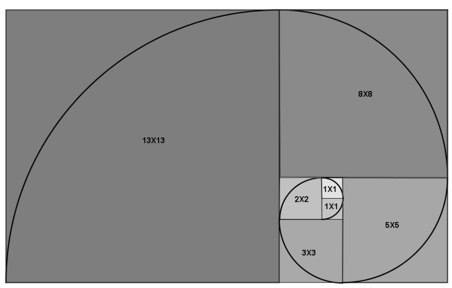
Problema: Sólidos geométricos

---

1. Justapondo dois quadrados com medida de comprimento de lado igual a 1, obtém-se um retângulo do tipo 2×1 (isto é, tal que as medidas dos comprimentos dos lados são 2 e 1), sendo a medida de comprimento do maior lado igual à soma das medidas dos comprimentos dos lados dos quadrados iniciais.

Justapondo agora outro quadrado com medida de comprimento de lado igual a 2 (a medida de comprimento do maior lado do retângulo 2×1), teremos um retângulo 3×2.

Continuando a justapor quadrados com medidas de comprimento de lados iguais à maior das medidas dos comprimentos dos lados dos retângulos obtidos no passo anterior, obtemos uma construção, como se ilustra na figura seguinte.



Unindo-se os arcos (quartos) de circunferência que se obtêm dos quadrados, unindo adequadamente vértices opostos destes, constrói-se uma espiral, designada por Espiral de Fibonacci.

(a) Mostra que a medida do comprimento da espiral de Fibonacci representada na figura é $\dfrac{33\pi}{2}$.

(b) Uma esfera foi introduzida num recipiente cilíndrico em que as bases têm raio igual ao da esfera e a altura é igual ao diâmetro da esfera (Figura 1).

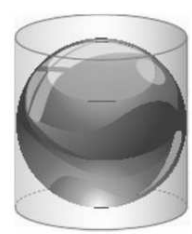


Figura 1

(i) Determina a medida do volume da esfera, se a medida da altura do cilindro é igual à medida de comprimento da Espiral de Fibonacci.

(ii) Determina a medida do volume da parte do cilindro, não ocupado pela esfera, se a medida do raio da base do cilindro é igual à medida de comprimento da Espiral de Fibonacci.

Problema: Sequências e regularidades

---

1. Considera a sucessão de Fibonacci (F_n)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots.$$

(a) Confirma que as seguintes igualdades são verdadeiras

$$F_1^2 + F_2^2 = F_3$$
$$F_2^2 + F_3^2 = F_5$$
$$F_3^2 + F_4^2 = F_7$$

(b) Completa as igualdades seguintes, determinando o número de Fibonacci correspondente a $\clubsuit$, $\diamondsuit$ e $\heartsuit$.

$$\clubsuit^2 + F_5^2 = F_9$$
$$F_5^2 + F_6^2 = \diamondsuit$$
$$F_6^2 + \heartsuit^2 = F_{13}$$

(c) Estabelece uma conjetura, determinando o número de Fibonacci $\spadesuit$, na igualdade seguinte

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = \spadesuit,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

(d) Por repetição, utilizando triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos, foi construída a sequência da figura com F_{13} peças.

i. Qual é o polígono que ocupa a posição de ordem F_8? E a de ordem F_{10}?

ii. Qual é o polígono que ocupa a última posição da sequência?

iii. Considera a sequência numérica em que cada termo é igual ao número de lados do polígono correspondente. Escreve os cinco termos consecutivos dessa sequência a começar no F_9 termo.

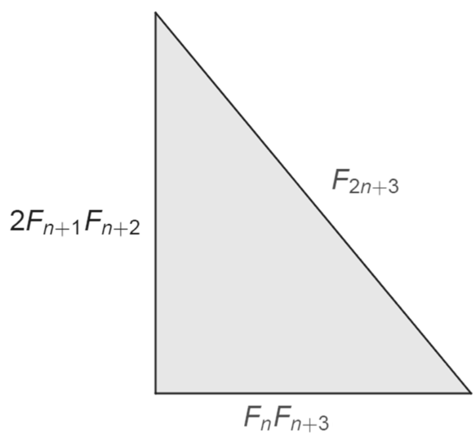
Problema: Teorema de Pitágoras

---

1. Em 1984, Charles Raine observou que, tomando quaisquer quatro números consecutivos da sucessão de Fibonacci (F_n), isto é,

$$F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$$

o produto dos termos extremos, F_nF_{n+3}, e duas vezes o produto dos termos internos, $2F_{n+1}F_{n+2}$, representam as medidas dos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo, sendo a medida do comprimento da hipotenusa o número de Fibonacci F_{2n+3}.



Assim, $(F_nF_{n+3}, 2F_{n+1}F_{n+2}, F_{2n+3})$ é uma tripla pitagórica.

Considera a sucessão de Fibonacci definida por

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

(a) Escolhe quatro termos consecutivos desta sucessão e verifica a conclusão de Charles Raine.

(b) Tendo em conta a conclusão de Charles Raine, determina as medidas de comprimento dos catetos de um triângulo retângulo, cuja medida de comprimento da hipotenusa é o número de Fibonacci 233.