Problemas (9^{o} Ano)

Problema: Probabilidades

A palavra FIBONACCI é construída por nove letras.

Foram usadas três cores – verde, azul e vermelho – para representar cada uma das letras da palavra FIBONACCI num cartão, como é sugerido a seguir.

Depois, os nove cartões foram introduzidos num saco.

Considera a experiência que consiste em retirar, ao acaso, um cartão do saco e registar a letra que ocorre e a cor que está presente no cartão.

1. Determina a probabilidade de ocorrer:
   (a) uma vogal;
   (b) uma consoante de cor vermelha;
   (c) uma vogal de cor verde;
   (d) não ocorrer letra de cor verde.

2. Considera os acontecimentos:

   A: *"Sair letra de cor verde."* B: *"Sair vogal."*

   (a) Os acontecimentos A e B são incompatíveis? Justifica.
   (b) Determina $P(AUB)$.

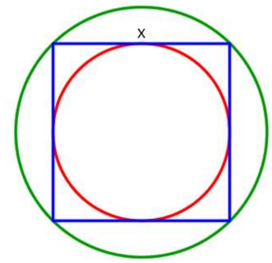
3. Foi retirado um cartão e saiu uma consoante. Vai ser retirado um segundo cartão.

   Determina a probabilidade de sair, no segundo cartão, vogal se:
   (a) não houver reposição do primeiro cartão;
   (b) houver reposição do primeiro cartão.

Problema: Funções

---

1. Na figura está representado um quadrado com medida de lado x e duas circunferências, uma inscrita no quadrado e outra circunscrita ao quadrado. Considera as funções f e g que a cada número de Fibonacci x fazem corresponder, respetivamente, a medida da área do círculo inscrito no quadrado e a área limitada pelas duas circunferências (coroa circular).



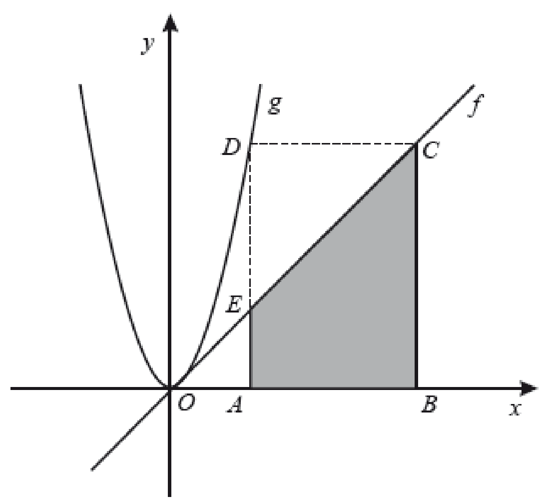
   Mostra que $f\left(F_n\right) = g\left(F_n\right)$, onde F_n denota o número de Fibonacci de ordem n.

2. Considera a sucessão de Fibonacci (F_n) definida recursivamente por

$$F_1 = F_2 = 1$$
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n = 2, 3, \ldots$$

   No referencial cartesiano da função, estão representadas partes dos gráficos de duas funções, f e g, e um trapézio $[ABCE]$.
   Sabe-se que:

   - a função f é definida por $f(x) = x$.
   - a função g é definida por $g(x) = F_4 x^2$.
   - o quadrilátero $[ABCD]$ é um retângulo.
   - os pontos A e B pertencem ao eixo das abcissas.
   - o ponto D pertence ao gráfico da função g.
   - os pontos E e C pertencem ao gráfico da função f.
   - os pontos A e E têm abcissa igual a F_2.

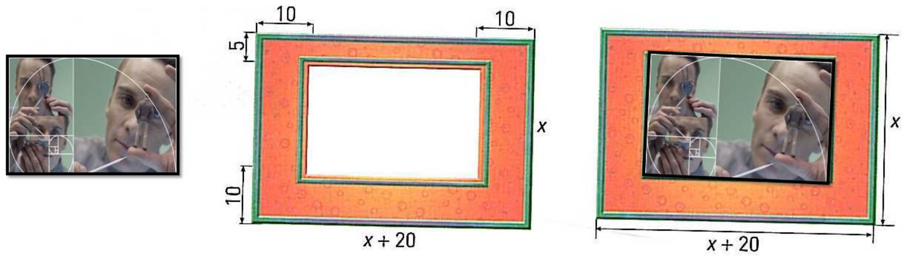


   (a) Determina a medida da área do trapézio $[ABCE]$. Mostra como chegaste à tua resposta.

   (b) Determina a expressão algébrica da função h, cujo gráfico é simétrico ao gráfico da função g relativamente ao eixo das abcissas.

Problema: Equações

1. A uma tela, contendo a espiral de Fibonacci, foi aplicada uma moldura como a representada na figura, para, em seguida, colocar-se o quadro numa parede.



Considera que as medidas indicadas na figura se encontram expressas em centímetros.

   (a) Admite que o quadro final (tela +moldura) ocupa uma área de $48dm^2$.
   Determina, em centímetros, as dimensões da tela nessas condições.

   (b) Considera que a tela tem $10dm^2$ de área. Calcula, neste caso, a área que o quadro final ocupa na parede.

2. Sejam F_2 e F_3 o segundo e terceiro números de Fibonacci (respetivamente).
Para cada valor de k a expressão

$$F_2x^2 - F_3x + k = 0$$

representa uma equação do segundo grau.

   (a) Para que valor de k se obtém uma equação do segundo grau incompleta?

   (b) Escreve uma expressão que represente o respetivo binómio discriminante.

   (c) Substitui k pelo valor que anula o binómio discriminante e resolve a equação.

3. Considera a seguinte equação do segundo grau

$$(x - F_n)\,(x - F_{n-1}) = 0\,,$$

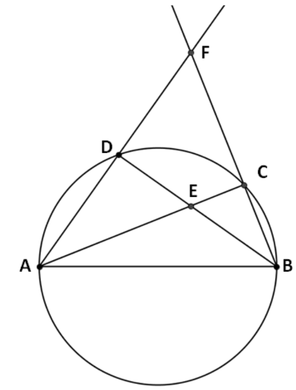
onde (F_n) denota a sucessão de Fibonacci.

Qual das seguintes equações é equivalente à equação dada?

(A) $x^2 - F_{n+1}x + F_{n-1}F_n = 0$ (B) $x^2 - F_{n-2}x + F_{n-1}F_n = 0$

(C) $x^2 + F_{n+1}x - F_{n-1}F_n = 0$ (D) $x^2 + F_{n-2}x - F_{n-1}F_n = 0$

PROBLEMA: CIRCUNFERÊNCIA



1. Considera a circunferência de diâmetro AB.

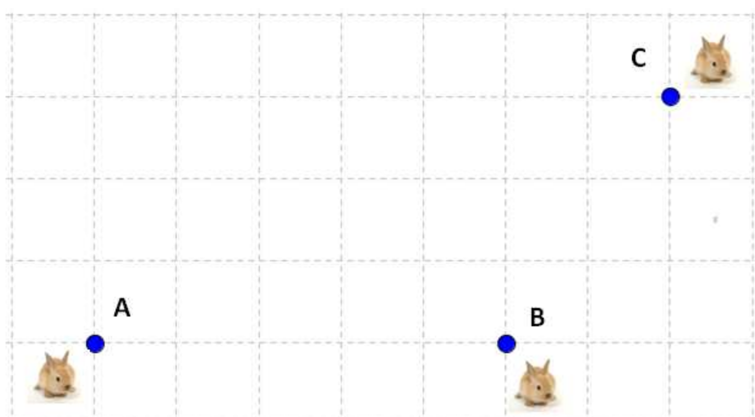
   Sabe-se que:

   - C e D são pontos da circunferência.
   - F é o ponto de interseção das semi-retas AD e BC.
   - a medida da amplitude do ângulo BAD é $11 \times F_5$ graus, onde F_5 corresponde ao quinto número de Fibonacci.
   - a medida da amplitude do arco BC é $20 \times F_3$ graus, onde F_3 corresponde ao terceiro número de Fibonacci.

   Determina a medida de amplitude do arco CD, do ângulo AFB e do ângulo CED.

2. Na figura estão representados três coelhos pelos pontos A, B e C respetivamente.

   Pretende-se estudar a localização de um ponto F, correspondente a Fibonacci.



   Reproduz o esquema no teu caderno e determina com rigor uma possível localização de Fibonacci, sabendo que:

   - Os coelhos A e B distam $2km$ um do outro.
   - Fibonacci está à mesma distância do coelho A e C.
   - Fibonacci está a $800m$ do coelho B.

Problema: Números reais

Desde a antiguidade, há um número que vem sendo estudado por matemáticos e curiosos devido às suas extraordinárias propriedades. Este número ficou conhecido por número de ouro e é usualmente denotado pela letra grega Φ, em homenagem ao escultor Phidias (490-430 a.c). O número de ouro, é um número irracional, com propriedades curiosas, cujo valor aproximado é $1,61803$.
Tornou-se célebre pela utilização que pintores e arquitetos da Antiguidade fizeram dele nas suas obras. Fibonacci, no seu livro *"De Divina Proportione"*, denominou-o de *"Proporção Divina"*.
O número de ouro é o único número positivo que verifica a seguinte relação $\Phi^2 = \Phi + 1$.

1. Resolve esta equação e identifica o valor exato do número de ouro.

2. A fórmula explícita do número de Fibonacci de ordem n, F_n, é conhecida, na literatura, por fórmula de Binet, e estabelece que

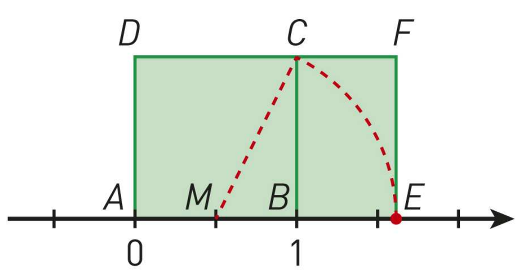
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) .$$

   Tendo em conta a fórmula de Binet, mostra que $F_2 = 1$.

3. Considera a inequação $-\Phi\, x - \sqrt{5} \geq 1$.

   Resolve-a e representa na reta real o seu conjunto-solução.

4. Na figura, $ABCD$ é um quadrado com medida de comprimento de lado igual a 1, e M é o ponto médio do lado AB. Tal como a figura sugere, foi construído o retângulo $AEFD$.



   (a) Atendendo aos dados da figura, determina os números reais correspondentes aos pontos M e E.

   (b) Mostra que $\overline{AE} = \Phi$.

PROBLEMA: TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Charles Raine observou (em 1984) que, se tomar quaisquer quatro termos consecutivos da sucessão de Fibonacci,

$$\ldots, F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}, \ldots$$

então $(F_nF_{n+3}, 2F_{n+1}F_{n+2}, F_{2n+3})$ é uma tripla pitagórica, isto é, os números de Fibonacci F_nF_{n+3}, $2F_{n+1}F_{n+2}$ e F_{2n+3} representam as medidas dos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo, sendo a medida do comprimento da hipotenusa o número de Fibonacci F_{2n+3} (Figura 1).

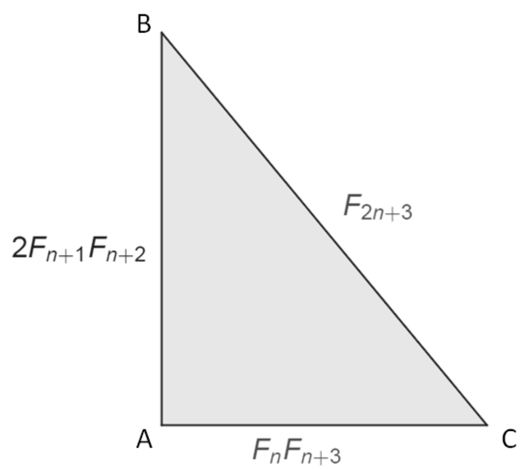


Figura 1

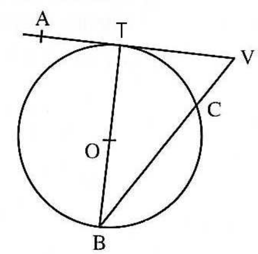
Considera o triângulo $[ABC]$ representado na Figura 1. Designado por $\widehat{\alpha}$ a medida da amplitude do ângulo ABC e por $\widehat{\beta}$ a medida da amplitude do ângulo BCA, responde às seguintes questões:

1. Mostra que
$$\cos\widehat{\alpha} + \sin\widehat{\beta} = \frac{4F_{n+1}F_{n+2}}{F_{2n+3}} \text{ e } \mathrm{tg}\widehat{\alpha} = \frac{F_nF_{n+3}}{2F_{n+1}F_{n+2}} \,.$$

2. Considera a sequência formada pelos doze primeiros termos da sucessão de Fibonacci:
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144\,.$$
Escolhendo $n = 2$ nos dados da Figura 1, determina o valor, aproximado em graus, das medidas das amplitudes dos ângulos ABC e ACB.

Problema Global

Considera a circunferência $\mathcal{C}$ de centro O e diâmetro $[BT]$ representada ao lado.



- A reta VA é tangente a $\mathcal{C}$ no ponto T.
- $[BC]$ é um lado de um triângulo equilátero, inscrito em $\mathcal{C}$, cujo perímetro é $150\sqrt{F_4}$ cm, onde F_4 é o número de Fibonacci de ordem 4.

Atendendo aos dados do problema, responde, justificando convenientemente, às seguintes questões:

1. A altura do triângulo equilátero, referido no enunciado deste problema, é um número irracional? Justifica.
2. Determina a medida de amplitude do ângulo TVB.
3. Sejam X e Y dois pontos de $\mathcal{C}$ tais que as distâncias às retas VA e VB são iguais. Admitindo que o ponto mais próximo de V é o ponto X, mostra que

$$\overset{\frown}{\mathrm{TY}} = 60^{\mathrm{o}} + \overset{\frown}{\mathrm{TX}} \quad \text{e} \quad \overset{\frown}{\mathrm{BY}} = 60^{\mathrm{o}} + \overset{\frown}{\mathrm{CX}}\,.$$

4. Admite, agora, que o perímetro do triângulo $[TVB]$ é 300 cm, que $\overline{TB} > \overline{TV}$ e que o comprimento do maior lado é 125 cm.

   4.1. Mostra que o comprimento do raio de $\mathcal{C}$ é 50 cm e que $\overline{TV} = 75$ cm.

   4.2. Calcula a probabilidade de um ponto, escolhido ao acaso, da região delimitada pelo triângulo $[TVB]$, pertencer ao círculo de centro O e raio $[OB]$.

   4.3. Considera um conjunto de retângulos, todos com a mesma área e cuja largura, y, é metade do comprimento, x.

   4.3.1. Admitindo que o perímetro de um dos retângulos é igual ao perímetro do triângulo $[TVB]$, determina a área desse retângulo.

   4.3.2. Verifica que x e y são grandezas inversamente proporcionais e interpreta o valor da constante de proporcionalidade no contexto do problema.

   4.4. Tendo em conta que os números de Fibonacci de ordens 7 e 8 são, respetivamente, $F_7 = 13$ e $F_8 = 21$, determina a medida de amplitude do ângulo ABT, sabendo que $\overline{TA} = F_9$, sendo F_9 o número de Fibonacci de ordem 9.