
PROBLEMA: TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Charles Raine observou (em 1984) que, se tomar quaisquer quatro termos consecutivos da sucessão de Fibonacci,

$$\dots, F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}, \dots$$

então $(F_n F_{n+3}, 2F_{n+1} F_{n+2}, F_{2n+3})$ é uma tripla pitagórica, isto é, os números de Fibonacci $F_n F_{n+3}$, $2F_{n+1} F_{n+2}$ e F_{2n+3} representam as medidas dos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo, sendo a medida do comprimento da hipotenusa o número de Fibonacci F_{2n+3} (Figura 1).

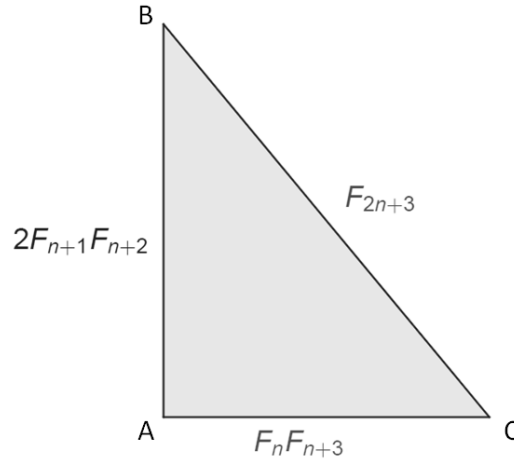


Figura 1

Considera o triângulo $[ABC]$ representado na Figura 1. Designado por $\hat{\alpha}$ a medida da amplitude do ângulo ABC e por $\hat{\beta}$ a medida da amplitude do ângulo BCA , responde às seguintes questões:

1. Mostra que

$$\cos \hat{\alpha} + \sin \hat{\beta} = \frac{4F_{n+1}F_{n+2}}{F_{2n+3}} \text{ e } \operatorname{tg} \hat{\alpha} = \frac{F_n F_{n+3}}{2F_{n+1}F_{n+2}}.$$

2. Considera a sequência formada pelos doze primeiros termos da sucessão de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

Escolhendo $n = 2$ nos dados da Figura 1, determina o valor, aproximado em graus, das medidas das amplitudes dos ângulos ABC e ACB .