5. SÉRIES NUMÉRICAS

Neste capítulo, vamos estender o conceito de adição, válido para um número finito de parcelas, à uma soma infinita de parcelas.

5.1: Definição e exemplos: Série geométrica e série de Dirichlet

5.1.1: Definições

Definição 1.1: Dada uma sucessão de números reais $(u_n)_{n\in IN}$, chama-se **série de números reais** ou **série numérica** à soma infinita

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n .$$

Os números $u_1, u_2, \cdots$ chamam-se **termos** da série numérica e o n.$^{\text{mo}}$ termo u_n é designado por **termo geral** da série.

Para calcular, se possível, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ vamos considerar a seguinte sucessão:

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\ldots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n .$$

Definição 1.2: A sucessão $(S_n)_{n\in IN}$ chama-se **sucessão de somas parciais** ou **sucessão associada à série**.

Definição 1.3:

(i) Se a sucessão $(S_n)_{n\in IN}$ converge para S, isto é, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S \in IR$, diz-se que a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é **convergente**, e então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = S$.

O número S é chamado **soma da série.**

(ii) Se a sucessão $(S_n)_{n\in IN}$ é divergente, isto é, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ não existe ou é infinito, diz-se que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é **divergente**. Neste caso, a série não tem soma.

5.1.2: Série geométrica

Definição 1.4: Uma **série geométrica** de 1º termo a e de razão r é uma série numérica da forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots, \text{ com } a, r \in IR \setminus \{0\}.$$

Teorema 1.5: A série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ diverge se e só se $|r| \geq 1$, e converge se e só se $|r| < 1$, nesse caso, $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$.

Exemplo 1.6: Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$ e, se possível, calcule a sua soma.

5.1.3: Série de Dirichlet

Definição 1.7: Chama-se **<u>série de Dirichlet</u>** á série definida por $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p > 0$. Para $p = 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é designada por **<u>série harmónica</u>**.

Teorema 1.8: A série de Dirichlet é convergente se $p > 1$, e é divergente se $0 < p \leq 1$.

5.2: Algumas propriedades das séries

Teorema 2.1: Para todo o $p \in IN$, a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge se e só se $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ converge.

Teorema 2.2: Se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ são convergentes, com somas S e T respectivamente, então:

(i) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n)$ converge e tem soma $S \pm T$.

(ii) Para todo o $\lambda \in IR$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda u_n$ converge e tem soma λS.

Teorema 2.3: Se a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \pm v_n)$ é divergente.

Na maior parte dos casos, é difícil determinar a soma de uma série. Por isso, iremos apresentar alguns critérios que permitem analisar a natureza de uma série, sem recorrer ao cálculo de S_n.

5.3: Critério do termo geral para a divergência

A seguir apresenta-se uma condição necessária de convergência de séries numéricas.

Teorema 3.1: Condição necessária de convergência

Se a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente então $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Nota: O recíproco do teorema anterior é falso. A série harmónica pode servir de contra-exemplo.

Na prática, utiliza-se mais a negação do teorema anterior.

Corolário 3.2: Teste da divergência ou Critério do n.$^{\text{mo}}$ termo

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, então a série numérica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

Exemplo 3.3: Estude a natureza da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n}{1+3n}$.

5.4: Série de termos não negativos: critérios de Cauchy e de D' Alembert

Teorema 4.1: Critério de Cauchy ou da Raiz

Sejam $u_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$.

(i) Se $L < 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente;

(ii) Se $L > 1$ ou $L = 1^+$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente;

(iii) Se $L = 1^-$, então não se pode concluir nada.

Exemplo 4.2: Determine a natureza da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{3n+1}}{n^n}$.

Teorema 4.3: Critério de D'Alembert ou da Razão

Sejam $u_n > 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$.

(i) Se $L < 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente;

(ii) Se $L > 1$ ou $L = 1^+$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente;

(iii) Se $L = 1^-$, então não se pode concluir nada.

Exemplo 4.4: Determine a natureza da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$.

5.5: Séries alternadas: Critério de Leibniz

Os critérios de convergência estudados nas secções anteriores, só podem ser aplicados a séries de termos não negativos. Nesta secção, estudaremos séries cujos termos são alternadamente positivos e negativos.

Definição 5.1: Chama-se **série alternada** à série em que dois termos consecutivos têm sinais opostos, ou seja, é da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \text{ ou } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{, com } a_n > 0,\ \forall n \in IN.$$

Teorema 5.2: Critério de Leibniz

Se $a_n > 0$, a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge se verifica as condições seguintes:

(i) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

(ii) a sucessão $(a_n)_{n\in IN}$ é decrescente, ou seja, $a_{n+1} - a_n \leq 0$, $\forall n \in IN$.

Nota: Se a primeira condição do teorema anterior não se verifica, podemos concluir, pelo critério do n.[mo] termo, que a série é divergente.

Exemplo 5.3: Determine a natureza da série $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$.

5.6: Séries absolutamente convergentes e séries simplesmente convergentes

Esta secção é dedicada ao estudo da convergência de séries numéricas com termos arbitrários.

Teorema 6.1: Convergência Absoluta

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também é convergente.

Definição 6.2: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diz-se **absolutamente convergente** se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é convergente.

Definição 6.3: A série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diz-se **simplesmente convergente** se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge e $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ diverge.

Exemplo 6.4: Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{3^n}$ é absolutamente convergente.