

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Viseu
Instituto Politécnico de Viseu

EXERCÍCIOS DE MATEMÁTICA

MAIORES DE 23

CURSOS DE ENGENHARIA

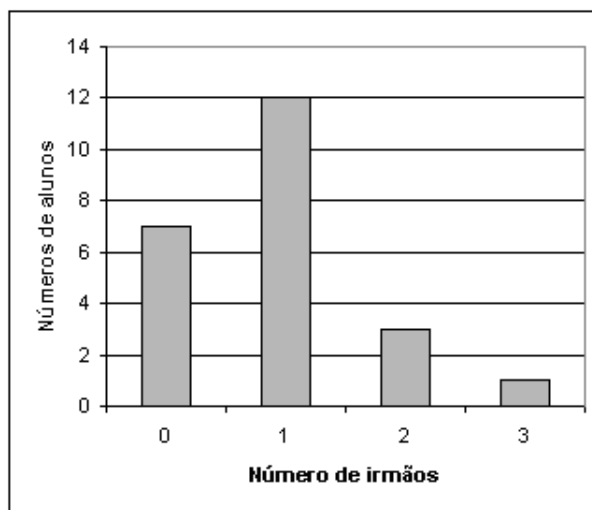
Ano Lectivo 2011/2012

Noções básicas de Estatística e Probabilidades.

1. Na turma do António realizou-se um inquérito que incluía a seguinte questão:

“ Quantos irmãos tens ?”

A respostas obtidas, relativamente a esta questão, estão representadas no gráfico de barras que se segue.



Um aluno é escolhido aleatoriamente.

- a) Qual dos seguintes acontecimentos é o mais provável?
- . Não ter irmãos
 - . Ter pelo menos 1 irmão
 - . Ter menos de 2 irmãos
- b) Qual é a probabilidade de ter 3 irmãos?

2. Numa turma de 25 alunos, as suas idades e sexos estão distribuídos como indica a tabela.

Idade	Rapazes	Raparigas
15	4	2
16	5	4
17	6	4

Escolhe-se ao acaso um aluno dessa turma e constata-se que ele tem 17 anos. Qual é a probabilidade de ele ser uma rapariga?

3. Na escola do António fez-se um estudo à eficácia do cozinheiro da cantina.

Concluiu-se que :

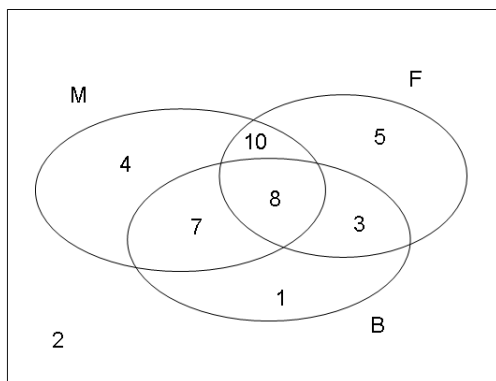
- . A probabilidade de a comida ficar queimada e com sal a mais é de 3%;
- . A probabilidade de a comida ficar com sal a mais é de 9%;
- . A probabilidade da comida ficar boa (sem sal a mais nem queimada) é 80%.

Determine a probabilidade de a comida ficar queimada.

4. Quarenta alunos inscrevem-se para exame.

Dois alunos faltaram a todos os exames e os outros fizeram exame a pelo menos uma das seguintes disciplinas: Matemática (M), Física (F) e Biologia (B).

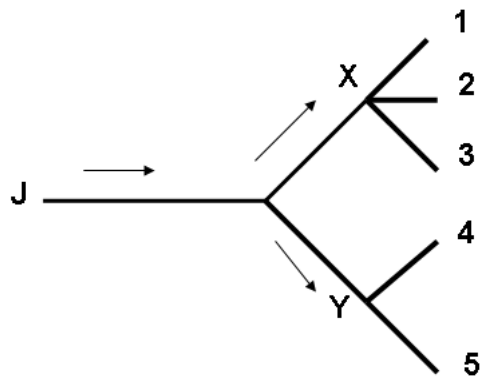
O diagrama a seguir indica o número de alunos em cada exame.



Se escolhermos ao acaso um dos alunos inscritos para exame, qual é a probabilidade de :

- ter feito exame a Matemática?
- ter feito exame a Matemática mas não a Física nem a Biologia?
- ter feito exame às três disciplinas?

5. Na figura está representado um caminho, que vai apresentando várias bifurcações.



O João parte da posição J , nunca inverte o sentido de marcha, e tem a possibilidade de escolher igualmente qualquer percurso quando se encontra num cruzamento.

Determine a probabilidade

- a) do João chegar a 2.
- b) do João chegar a 5.
- c) do João chegar a 2 sabendo que já se encontra na posição X .

6. A Maria tem na lava louça três copos, quatro pratos e dez colheres.

Considere que todos os objectos são distintos e que um dos copos está partido.

A Maria prepara-se para almoçar, como tal vai necessitar de um copo, um prato e uma colher.

- a) De quantas maneiras distintas poderá ela fazer a escolha?
- b) Determine a probabilidade de a Maria escolher o copo partido.

7. Capicua é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número. Por exemplo, 467764 e 401104 são capicuas.

Quantas capicuas existem com 6 algarismos, sendo o primeiro algarismo:

- a) ímpar
- b) maior que 2
- c) diferente de 9

8. O António foi a um restaurante que tinha para esse dia a ementa apresentada ao lado.

Sabendo que o António escolheu uma entrada, um prato (**peixe ou carne**) e uma sobremesa, determine:

- a) quantas refeições diferentes pode ter escolhido.
- b) a probabilidade do arroz de Polvo ter feito parte da sua refeição.

<u>EMENTA</u>	
ENTRADAS	
. Melão com Presunto	
. Salada do chefe	
PEIXE	
. Espelada do mar	
. Arroz de polvo	
CARNE	
. Cabrito assado	
SOBREMESAS	
. Pudim	
. Gelado	
. Salada de fruta	

9. Interrogaram-se 350 alunos sobre o gosto pela prática desportiva extra-escola. As respostas foram as seguintes:

	Sim	Não
Raparigas	98	65
Rapazes	84	103

Escolhendo um aluno ao acaso, qual a probabilidade de:

- a) ser rapariga e gostar de praticar desporto extra-escolar;
 - b) não gostar de praticar desporto extra-escolar;
 - c) das raparigas, não gostar de praticar desporto extra-escolar.
10. No bar de uma escola registou-se, durante bastante tempo, os pedidos dos alunos no intervalo grande da manhã. Verificou-se que 77% pediram sandes, 37% pediram sandes e bebidas e 8% pediram outras coisas. Determine a probabilidade de:
- a) não pedir uma bebida;
 - b) pedir uma sandes ou uma bebida;
 - c) pedir uma sandes e uma bebida;
 - d) sabendo que pediu sandes, a probabilidade de ter pedido uma bebida.

11. Interrogaram-se 80 donas de casa acerca da utilização de duas lixívia, L_1 e L_2 : 30 declararam usar L_1 , 20 declararam utilizar L_2 e 18 declararam utilizar L_1 e L_2 . Qual a probabilidade de:
- utilizar pelo menos uma das lixívia?
 - não utilizar nenhuma das lixívia?
 - utilizar apenas a lixívia L_1 ?
 - ter adquirido L_1 , sabendo que adquiriu L_1 ou L_2 ?
12. Numa turma do 10º ano, 70% dos alunos gostam de futebol, 20% gostam de natação e 15% gostam de futebol e natação. Escolhendo um aluno ao acaso, determine a probabilidade de que ele não goste de futebol nem de natação.
13. Num determinado canal de televisão fez-se publicidade a um novo detergente X . Fez-se uma sondagem e concluiu-se que: 65% viram o anuncio na televisão, 45% compraram o detergente X e 20% não viram o anuncio nem compraram o detergente. Determine a probabilidade de uma pessoa comprar o detergente, sabendo que viu o anuncio na televisão.
14. De 120 estudantes, 70 estudam matemática, 80 estudam português e 40 matemática e português. Se um estudante é escolhido aleatoriamente, determine a probabilidade de:
- estudar matemática ou português;
 - s  estudar português;
 - não estudar matemática;
 - não estudar nem português nem matemática;
 - estudar matemática, sabendo que estuda português.
15. Capicua   uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita d  o mesmo número. Quantas capicuas existem com 5 algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar?
17. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis num determinado stand, o qual revelou que: 15% dos clientes comprem automóvel com alarme e com rádio, 20% dos clientes comprem automóvel sem alarme e sem rádio e 45% dos clientes comprem automóvel com alarme (com ou sem r dio). Um cliente acaba de comprar um automóvel. Qual a probabilidade desses automóvel estar equipado com rádio, mas não ter alarme?

Números reais. Simplificação de expressões numéricas com números reais.

Operações com polinómios.

1. Indique os divisores de 18, 50 e 24.

2. Decomponha em factores primos os números 45, 72 e 105.

3. Calcule:

$$a) \frac{5}{8} + \frac{1}{12} \quad b) \frac{3}{4} - \frac{7}{10} \quad c) -\frac{5}{18} + \frac{7}{12} \quad d) -\frac{5}{6} + \frac{1}{4} - \frac{7}{3}$$

4. Simplifique:

$$a) (-2)^4 \times (-2)^3 \quad b) \frac{(-3)^{15}}{(-3)^8} \quad c) 2^3 + 2^{10} \div 2^9$$
$$d) \left(\frac{1}{3}\right)^6 \times [(-3)^2]^3 \quad e) 2^3 \times 32 \div 16^2 \quad f) \frac{(3^2 - 3)3 \div 2^3 - 5^2}{\sqrt{5 + \sqrt{16}}} \quad g) [(-2)^{-3}]^{-2} + (2^{-1})^{-2}$$

5. Calcule o valor exacto de:

$$a) (\sqrt{7})^2 + \sqrt{\frac{1}{25}} \quad b) 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \quad c) -\sqrt{2(\sqrt{2} + 3)}$$
$$d) (\sqrt{5} + 3)^2 \quad e) 1 - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)^2 \quad f) (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$$

6. Determine o valor de:

$$a) \frac{2(3 + 5) - 16\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$
$$b) \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^0} - \left(-\frac{2^{-1}}{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$c) \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^3$$

7. Dados os polinômios $R = x^3 - 3x^2 + 2$, $S = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ e $T = x^2 - x - 1$, determine
- $R+S-T$
 - $-R+S+T$
 - $R-S-T$
8. Sendo $A = x - 3$, $B = \frac{1}{2}x^2 - 1$ e $C = 3x + 7$, calcule:
- $A.B-3C$
 - $B-2A$
 - $A.B+B.C-A.C$
9. Sabendo que $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, determine:
- $(3x + 7)^2$
 - $(2x^2 + 1)^2$
 - $(x + \frac{1}{2})^2$
 - $(3 - 2x)^2$
 - $(\frac{1}{2}x - 4)^2$
 - $(-2x^2 + x)^2$
10. Sabendo que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ desenvolva, e se necessário, simplifique:
- $(3 - x)(3 + x)$
 - $(-7 - \frac{2}{3}x)(-7 + \frac{2}{3}x)$
 - $(1 - 2a)(1 + 2a)$
11. Transforme num polinômio reduzido:
- $(3x - 1)(4x + \frac{1}{2}) - 2(x - 1)^2(x + 3)$
 - $(2x - 3)^2 - (x + 1)^2 - 3$
12. Sendo $A = 2x^2 - 1$, $B = x^3 - x + 1$, $C = 3x + 2$ e $D = -x^2 + x - 1$, calcule e simplifique:
- $(A + D)^2 - C$
 - $2A.C - B$
 - $A + B - C + D$
 - $(2A - D)^2 + 2B$

Equações e inequações do 1º grau. Equações do 2º grau.

Resolução de sistemas de equações.

1. Resolva, em IR , as seguintes equações do 1º grau.

a) $2x + 3 = 5$

b) $2x - 1 = 3$

c) $3x = 2x + 3$

d) $x + 8 - 2x = 18 + 2x$

e) $\frac{x}{3} - 1 = 0$

f) $\frac{x}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$

g) $\frac{2x}{5} - 2 = \frac{1}{3}$

h) $3(x + 2) - 5 = 2x + 1$

i) $x - 6 = 1 - 3(x + 2)$

j) $x - 2(x + 3) + 4(x - 2) = 0$

k) $1 + \frac{1}{2}(x + 1) = 4\left(\frac{x}{8} + \frac{1}{8}\right)$

l) $\frac{2+x}{3} = 2$

m) $4 - \frac{x+3}{3} = 5x + 4(x + 1)$

n) $\frac{2x-3}{2} = 1 - \frac{5x+1}{3}$

o) $\frac{2 - \frac{1}{2}x}{3} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$

p) $4 - \frac{x+3}{3} = 5x + \frac{3}{2}(x - 2)$

q) $\frac{x-1}{5} - \frac{3(x-1)}{5} = x - 2$

r) $\frac{x-2}{3} + \frac{x+3}{6} = 2(x + 5)$

s) $\frac{x}{7} + \frac{1-x}{2} = 3$

t) $2(1 - x) = x - 4$

u) $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}(4x - 3) = 9$

2. Resolva, em IR , as seguintes inequações do 1º grau.

a) $3x - 1 < 2$

b) $-2x + 1 \geq x - 3$

c) $2x + 5 - 3x > 15 + x$

d) $\frac{x}{3} - 1 \leq 0$

e) $1 - \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \geq -\frac{7}{2}$

f) $x - 8 > 5x + 3$

g) $\frac{x}{3} < \frac{2}{5}$

h) $2x + 5 < 3x - 6$

i) $\frac{x}{3} + 5 > 2x - \frac{1}{2}$

j) $3 \leq \frac{2x-3}{5} \leq 7x$

k) $-1 \leq \frac{4x+1}{3} \leq 0$

l) $-\frac{1}{2} \leq \frac{4x+1}{3} \leq \frac{2}{3}$

m) $2 - 3x + \frac{4}{2}x < 4$

n) $\frac{5}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) > -2x + 4$

o) $\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}(4x - 3) \geq 9 - x$

3. Considere o conjunto $A =]-\frac{9}{2}, 1[$.

a) Escreva todos os números inteiros pertencentes a A .

b) Seja

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : 4 + \frac{2-x}{3} \geq 6 \right\}.$$

i) Mostre que $B =]-\infty, -4]$.

ii) Determine $A \cap B$ e $A \cup B$

iii) Comente a seguinte afirmação “ $A \cap B \subset]-\infty, 0[$ e $A \cup B \supset]-\infty, 0[$ ”

4. Resolva, em IR , se possível, as seguintes equações do 2º grau.

a) $2x^2 - 4 = 0$

b) $2x^2 + 6 = 2$

c) $x^2 - 36 = 0$

d) $-3x^2 + 12 = 0$

e) $2x^2 - 4x = 0$

f) $x^2 + 5x = 0$

g) $2x = 3x^2$

h) $\frac{x^2}{3} = \frac{5x}{2}$

i) $(x+2)^2 = 3$

j) $x^2 - 8 = -4$

k) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

l) $2x^2 + 4x - 8 = 0$

m) $-2x^2 - x + 3 = 2$

n) $x^2 - 4x + 4 = 0$

o) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

p) $2x(3x+4) = 8$

q) $x^2 + 4x = \frac{9}{4}$

r) $x^2 + \frac{4x}{3} = -\frac{2}{3}$

s) $2x^2 + 7x = 0$

t) $2(x-1)^2 + 7x = (x-2)(x+2)$

u) $x^2 + 4x = -1$

v) $(x-1)(x^2-4) = 0$

w) $2x+1 = -x^2$

5. Determine os valores de k de modo que a equação

$$kx^2 + x + 2 = 0$$

a) tenha apenas uma solução;

b) não tenha nenhuma solução;

c) tenha duas soluções distintas.

6. Verifique se o ponto $(x, y) = (1, \sqrt{2})$ é solução do sistema

$$\begin{cases} x^3 - 3x = -y^2 \\ y^2 + x = 3 \end{cases}$$

7. Resolva os seguintes sistemas de equações e classifique-os.

$$a) \begin{cases} x - 4 = y \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = 6 \\ x = y + 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -7x - (2 - \frac{5}{2}) = 0 \\ \frac{3(2x + y)}{5} - 1 = 4x - \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2(x - y) = -\frac{1}{3} \\ \frac{3(x - 1)}{2} - y = 7 - 3y \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} a^2 - (a - 1)^2 = b \\ 0.4b - \frac{a - 1}{10} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3(x - 1) - 2(y - 3) = 4 \\ x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x + 1 = -(y - 3) \\ \left(\frac{1}{2} - y\right)^2 = x + y^2 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 2(x - 3) + y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$$

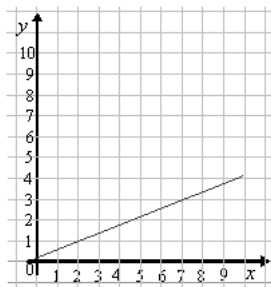
$$i) \begin{cases} x + y = 7 \\ \frac{2x}{5} = \frac{3y}{7} \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} 5(x + 1) + 3(y - 2) = 4 \\ 8(x + 1) + 5(y - 2) = 9 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x + y = 1 \\ y + 1 = x \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} \frac{x}{2} + 3y = 4 \\ \frac{7}{5}y - x = -2x \end{cases}$$

8. A recta de equação $-2x + 5y = 1$ está representada no referencial o.n. XOY.



- a) Represente no mesmo referencial a recta de equação $y = 2x - 3$.
- b) Resolva analiticamente o sistema:

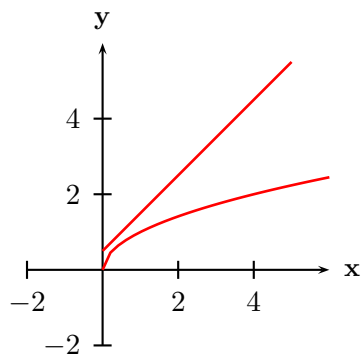
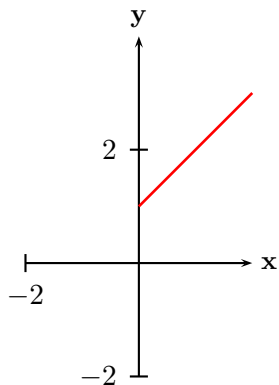
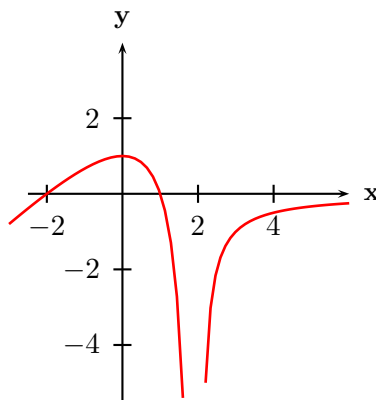
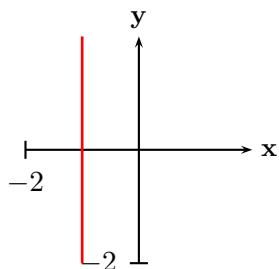
$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$$

Explique como pode usar o gráfico das duas rectas para verificar a solução que encontrou para o sistema.

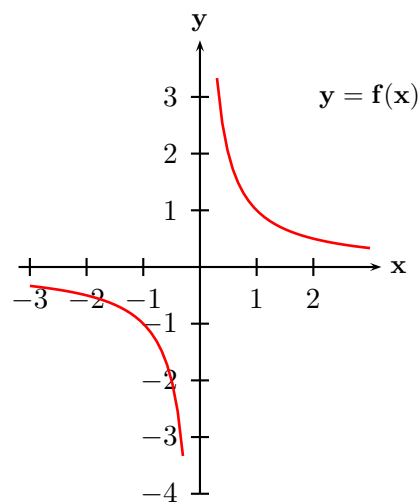
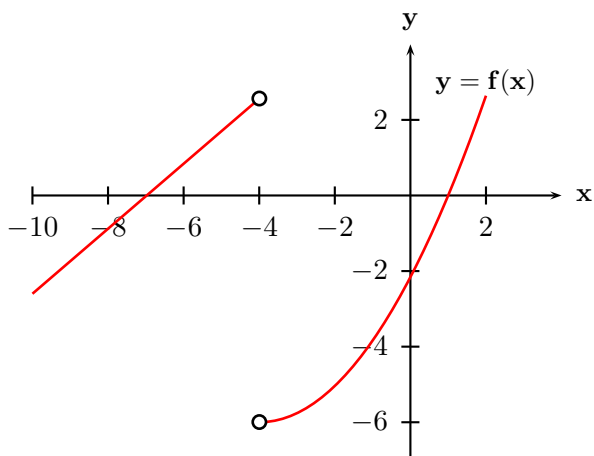
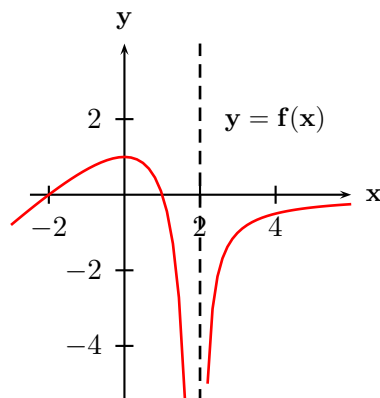
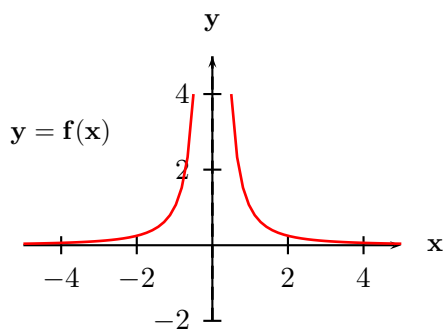
9. Duas pessoas ganharam 50 euros num trabalho. Uma delas ganhou 25% a mais do que a outra. Quanto ganhou cada pessoa?
10. Considere dois rectângulos A e B com o mesmo perímetro.
- Sabe-se que a largura do rectângulo A é o dobro da do B e que o comprimento do rectângulo B é o triplo do de A. Sabendo que o perímetro dos rectângulos é 20cm, determine as medidas dos rectângulos A e B.

Funções reais de variável real: domínio, contradomínio, injectividade, sobrejectividade, bijectividade, paridade e monotonia.

1. Identifique os gráficos que representam funções:



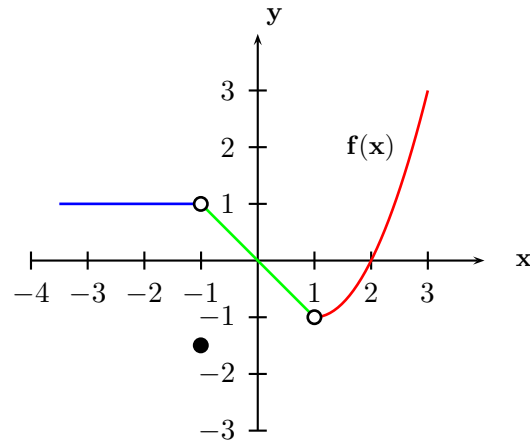
2. A partir dos gráficos das seguintes funções, indique o seu domínio e contradomínio. Estude também a injectividade, sobrejectividade, bijectividade, paridade e monotonia.



3. Considere a função $f(x) = 4x^3 - 7x + 1$.

- Determine $f(-2)$, $f(0)$ e $f(2)$.
- Determine, analiticamente, se a função é par ou ímpar.
- A partir do gráfico da função, indique os intervalos de monotonia.

4. Considere o seguinte gráfico da função f .



- a) Determine, caso existam, $f(-1)$, $f(0)$ e $f(1)$.
 - b) Indique os intervalos de monotonia de f .
 - c) Classifique f quanto à injectividade.
5. Seja $d(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$.
- a) Prove que d é uma função ímpar.
 - b) Através do gráfico da função, avalie a monotonia.
 - c) Indique o contradomínio de d .
6. Faça um esboço de um gráfico que
- a) não seja função.
 - b) seja uma função injectiva e negativa em \mathbb{R}^- , positiva em $]3, +\infty[$ e tenha um zero em $x = 1$.
 - c) seja uma função crescente em \mathbb{R}^- , decrescente em \mathbb{R}^+ e que tenha um máximo em $x = 0$ cujo valor é 3.
 - d) seja uma função crescente no intervalo $[1, 3]$, tal que a imagem do 2 seja 1, tenha domínio \mathbb{R} e contradomínio $[0, +\infty[$.
7. Seja $g(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ e $f(x) = x - 1$
- a) Determine os zeros da função g .
 - b) Determine o domínio e o contradomínio da função $\frac{g}{f}$.
 - c) Resolva $g(x) > f(x)$.

Estudo da função afim e função quadrática.

1. Represente graficamente as funções:

a) $f(x) = -2x + 1$

b) $f(x) = -1$

c) $f(x) = x - 1$

d) $f(x) = 2x - 1$

e) $g(x) = -3x + 3$

f) $h(x) = x - \frac{1}{2}$.

2. Qual dos seguintes gráficos passa pelo ponto B de coordenadas $(2, -1)$?

$f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2x - 5$, $h(x) = -3x + 5$, $i(x) = -x + 1$

3. Resolva graficamente as equações:

a) $2x + 1 = 3$

b) $3x - 2 = x + 1$

c) $-x + 5 = x - 1$

d) $5x - 4 = 2$

4. Resolva, graficamente, as seguintes inequações:

a) $x + 1 \geq -2$

b) $2x - 1 \leq -x + 1$

c) $-x + 3 < 1$

d) $-2x - 1 > 0$

5. Represente graficamente as seguintes funções:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = (x - 1)^2$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

e) $f(x) = x^2 - 3x$

f) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

6. Represente graficamente as funções quadráticas: $f(x) = x^2$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = -\frac{1}{3}x^2$ e $i(x) = 3x^2$. Todas elas são do tipo ax^2 . Qual a influência do parâmetro a ?

7. Represente graficamente as funções quadráticas: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = x^2 - 2$ e $i(x) = x^2 + 3$. Todas elas são do tipo $x^2 + y_0$. Qual a influência do parâmetro y_0 ?

8. Represente graficamente as funções quadráticas: $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = (x - 1)^2$, $h(x) = (x - 2)^2$ e $i(x) = (x + 5)^2$. Todas elas são do tipo $(x - x_0)^2$. Qual a influência do parâmetro x_0 ?

9. O vértice é o extremo de uma função quadrática. Quais as suas coordenadas?

10. Represente graficamente as seguintes funções e indique o seu domínio e contradomínio:

a) x^2 b) $2x^2 - 1$ c) $-x^2 - 3$ d) $x^2 + 6x + 9$

e) $(x - 1)^2$ f) $(x + 1)^2 - 1$ g) $-2x^2 + 5x + 3$

11. Para as seguintes funções, determine os seus zeros, caso existam, domínio e contradomínio.

a) $x^2 - 1$ b) $2x^2 + 1$ c) $x^2 - 6x + 9$ d) $3x^2 - 6x + 10$

12. Represente, graficamente as seguintes curvas:

a) $x = y^2 - 1$ b) $y = x^2 + 3x - 2$ c) $x = -2(y - 1)^2 - 1$ d) $y = -x^2 - x - 2$

13. Resolva as seguintes inequações do 2º grau.

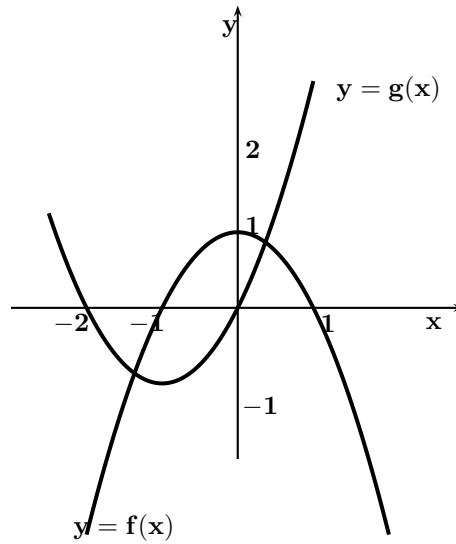
a) $x^2 + 1 \geq 2x$

b) $2 < x(x - 3)$

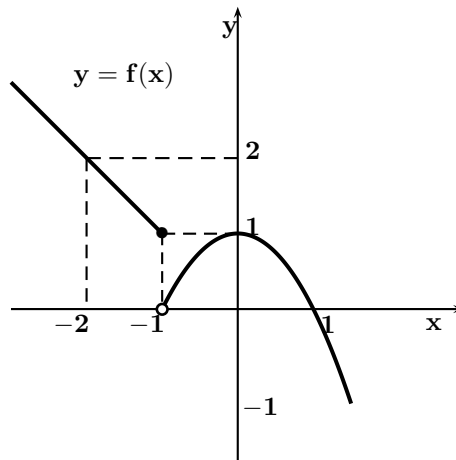
c) $x^2 < x$

14. Resolva analítica e graficamente $\frac{x^2 - 2x - 8}{x - 1} \geq 0$.

15. Determine a expressão de f e g representadas graficamente



16. Na figura está representado o gráfico de uma função f .



- Justifique que f é de facto uma função.
- Determine o domínio e o contradomínio de f .
- Faça um esboço de $f(x) + 1$, $f(x - 1)$ e $f(x - 1) + 1$.
- Comente a seguinte afirmação:
“Existe um intervalo onde a função f é injectiva, decrescente e negativa.”
- Determine os valores de x tais que $1 \leq f(x) \leq 2$.
- Mostre que para $x \leq -1$, $f(x) = -x$.

17. Uma rã dá um salto cuja trajectória pode ser descrita pela parábola $f(x) = -0,06x(x-50)$.

a) Qual o ponto em que aterra a rã?

b) Qual a altura máxima atingida pela rã?

c) Resolva analiticamente e graficamente o sistema
$$\begin{cases} f(x) = y \\ y - 1,5x = 0 \end{cases}$$

18. Resolva analiticamente e graficamente o sistema
$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$$

19. Resolva analiticamente e graficamente o sistema
$$\begin{cases} y = 3x^2 + 3x - 6 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

20. Resolva analiticamente e graficamente o sistema
$$\begin{cases} y = -0,4x^2 + 8x \\ y = 25 + x \end{cases}$$

21. O departamento financeiro de uma empresa usa a função P descrita por $P(x) = 200(15 - x)(x - 2)$, $0 \leq x \leq 30$, para calcular o lucro P , em euros, quando x artigos são produzidos e vendidos.

a) Determine os valores de x para os quais a empresa não tem prejuízo.

b) Resolva analiticamente e graficamente o sistema
$$\begin{cases} P(x) = y \\ y = 500x \end{cases}$$

Decomposição de polinómios em factores. Simplificação de expressões.

Resolução de inequações.

1. Decomponha em factores as seguintes expressões:

a) $7a^2 + a$

b) $2ab + b^2 + 3ab^2$

c) $6x^2 + 6x$

d) $2a^2b + 3ab$

e) $3mn + 15m^2n + 9mn^2$

f) $(x - 3)^2 - 2(x - 3)$

g) $a^2 - b^2$

h) $(3x - 5)^2 - (7x + 2)^2$

i) $(y - 2)^2 - (x + 3)^2$

j) $a^2 - (a - 3b)^2$

k) $(x - 5)^2 - (x^2 - 25)$

l) $(x - 2) - (x^2 - 4)$

m) $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 - 3\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)$

2. Decomponha num produto de factores de grau não superior a um:

a) $3x^2 + 3x$

b) $4x^2 - 16$

c) $(x + 1)^2 - 16$

d) $x^2(x + 1) - 9(x + 1)$

e) $4x^3 - 8x^2 - 32x$

f) $x^2 + 10x + 25$

g) $x^2 - 4x + 3$

h) $2x^2 + 3x - 2$

i) $-x^4 + 4x^2 - 3$

j) $x^3 + 10x^2 + 25x$

k) $x^3 - 3x^2 + 2x$

l) $x^3 - 9x$

m) $x^5 - 2x^4 + x^3$

3. Efectue as operações indicadas e escreva a relação $\frac{D}{d} = Q + \frac{R}{d}$.
- $(5x + 3) \div (x + 1)$
 - $(x^3 + 1) \div (x + 1)$
 - $(x^2 - 5x - 6) \div (2 + x)$
 - $(1 - x^2) \div (x^2 - 4)$
4. Utilize a regra de Ruffini para calcular o quociente e o resto em cada um dos casos seguintes:
- $(3x^2 + x + 2) \div (x - 2)$
 - $(5x + 3) \div (x + 1)$
 - $(2a^2 + 6a + 1) \div (a + 3)$
 - $(2y^3 - 3y + 1) \div (y - \frac{1}{2})$
 - $(x^3 + 2x + 3) \div (2x + 3)$
 - $(x^3 + 1) \div (x + 1)$
5. Decomponha os seguintes polinómios em factores do 1º grau.
- $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$
 - $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$
 - $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$, sabendo que admite a raiz $\frac{1}{2}$
 - $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$, sabendo que admite as raízes 1 e 2
6. Simplifique as seguintes expressões, indicando o conjunto onde a simplificação é válida.
- $\frac{5x^2}{10x^4}$
 - $\frac{x - x^3}{1 - x^4}$
 - $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3}$
 - $\frac{2x}{x^2 - 2x}$
 - $\frac{x^3 - 9x^2 - x - 9}{x^2 - 4x + 3}$
 - $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$
 - $\frac{(x - 3)^2 - (4 - x)^2}{4x^2 - 28x + 49}$
 - $\frac{2x^3 - 8x^2 - x + 4}{x^2 + 2x - 24}$

7. Efectue as seguintes operações e indique o domínio de validade do resultado:

$$a) \frac{2}{3x} + \frac{3}{2x} - \frac{5}{x^2}$$

$$b) \frac{x^2}{3x} - \frac{5}{12x}$$

$$c) \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+2}$$

$$d) \frac{4}{x^2-4} - \frac{2x}{2-x} + \frac{3}{x+2}$$

$$e) \frac{3x-2}{(x-1)^2} + \frac{1}{1-x^2}$$

$$f) \frac{4-x^2}{x^2-x+5} + \frac{x^2}{2-x}$$

$$g) \frac{x^2-9}{x^2} \cdot \frac{3x}{x-3}$$

$$h) (x+2) \cdot \frac{3x}{x^2-4}$$

$$i) \left(\frac{4}{x}-1\right)^2 \cdot \frac{x^2}{x^2-16}$$

$$j) (x+1) \div \frac{4x^2-4}{x^2}$$

$$k) \left(x - \frac{x}{x+1}\right) \div \left(\frac{x}{x-1} + x\right)$$

8. Resolva, em IR , as seguintes equações:

$$a) \frac{4+x}{5-x} = -2$$

$$b) \frac{5x}{x+4} = 0$$

$$c) \frac{3(x-2)}{(x-1)^2} - \frac{5}{2x-2} = \frac{3}{x-x^2}$$

$$d) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = 0$$

9. Resolva, em IR , as seguintes inequações:

$$a) \frac{2}{4x+3} \geq 0$$

$$b) \frac{x+1}{2x-4} > 2$$

$$c) \frac{x^2-4}{2-3x} < 0$$

$$d) \frac{x-1}{2-3x} \geq 0$$

$$e) \frac{x^2}{(x-3)(4+x)} \geq 0$$

$$f) \frac{(x-2)^3}{x^2(x+2)^2} \leq 0$$

$$g) \frac{-(x-1)^2}{(x+1)^3} \leq 0$$

$$h) \frac{x^2-4x}{x^2-2x+1} > 0$$

$$i) \frac{1}{x} > x$$

$$j) \frac{1}{2x-1} \geq \frac{1}{x}$$

$$k) \frac{2x}{x^2-2x} - \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} \geq 1$$

10. Considere a função $h(t) = \frac{(t-2)^3}{t^2+t}$

a) Determine o domínio de h .

b) Verifique em que intervalos a função é positiva.

c) Resolva $h(t) < \frac{1}{t}$.

Função inversa. Composição de funções.

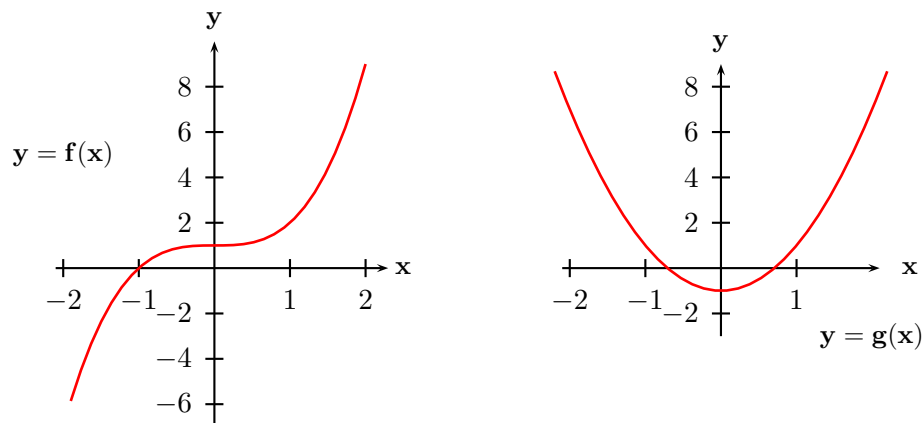
1. Determine o domínio e contradomínio das funções abaixo, e caracterize, se possível, a sua função inversa.

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $g(x) = \frac{x+1}{x-5}$ c) $h(x) = x^3 - 1$ d) $i(x) = \frac{2+x}{x}$
e) $f(x) = 2x^2 - 1$ f) $g(x) = \frac{x-3}{2x}$ g) $h(x) = x^2 - 2x - 3$ h) $i(x) = 2\sqrt{x+1} - 1$

2. Seja $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = -x^2 + 2x + 3$. Determine:

a) $f \circ g(1)$ b) $g \circ f(-1)$ c) $g \circ f(0)$ d) $f \circ f(2)$ e) $f \circ g(-1)$

3. Considere os gráficos seguintes e determine:



a) $f \circ g(1)$ b) $g \circ f(1)$ c) $g \circ f(0)$ d) $f \circ g(-1)$ e) $g \circ f(-1)$

Função exponencial e função logarítmica.

1. Considere o gráfico de $f(x) = \ln(x)$. A partir deste gráfico faça o esboço de $f(x) + 1$ e $f(x + 1)$.
2. A partir do gráfico da função $f(x) = \ln(x)$, represente graficamente as seguintes funções, indicando o seu domínio e o seu contradomínio:
 - a) $g(x) = \ln(x + 2)$.
 - b) $h(x) = 1 - \ln(x)$.
3. Considere o gráfico de $f(x) = e^x$. A partir deste gráfico faça o esboço de $f(x) - 1$ e $f(x - 1)$.
4. A partir do gráfico da função $f(x) = e^x$, represente graficamente as seguintes funções, indicando o seu domínio e o seu contradomínio:
 - a) $g(x) = e^{x+2}$.
 - b) $h(x) = e^x + 2$.
5. Completa as seguintes relações:
 - a) $\ln \dots = 1$
 - b) $\log_3 \dots = 0$
 - c) $3^{\log_3 2} = \dots$
 - d) $\log_5(2) = \frac{\dots}{\ln(5)}$
6. Aplique as propriedades dos logaritmos.
 - a) $\ln(e^{\sqrt{2}})$
 - b) $\ln x + 2 \ln y$
 - c) $\log_2(x - 2) - \log_2(x + 2)$
 - d) $\log_3(x + 1) + \log_3(y - 2) + \log_3(2z)$
 - e) $\log_6(\sqrt{x^2 + 1})$
 - f) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln(e)^2$

7. Considere a função $f(x) = e^{x-1} - 2$.

- a) Mostre que a função f é injectiva.
- b) Caracterize a função inversa de f .

8. Caracterize a função inversa das seguintes funções:

- a) $f(x) = 1 + \ln(x)$.
- b) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$.

9. Determine, se possível, a solução das seguintes equações:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| a) $e^x = e^5$ | b) $5^x + 10^x = 5^{x+1}$ |
| c) $e^{3x} - 3 = \ln(1)$ | d) $e^x - e^x x = 0$ |
| e) $e^{2x} - e^{1-x} = 0$ | f) $2\ln(x) - \ln(x+2) = 0$ |
| g) $\ln(x^2 - x) - \ln(6 - 2x) = 0$ | h) $\ln^2(x) - 3\ln(x) = -2$ |
| i) $e^{x+\ln(x)} = 2x$ | j) $e^x + 2e^{-x} = 3$ |
| a) $\ln(x) - 1 = 0$ | b) $e^{3x} - e^{x-1} = 0$ |
| c) $e^{2x} - 2 = \ln(1)$ | d) $2e^x + 4 = 2^2$ |

10. Resolva as seguintes inequações:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $e^{2-x} \leq 1$ | b) $e^{x-1} < xe^x$ |
| c) $\ln(1 - 3x) - 1 < 0$ | d) $2\ln(1 - x) - 1 > 0$ |

11. Determine o domínio das seguintes funções:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}$ | b) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$ |
| c) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ | d) $f(x) = \sqrt{2x - e^{x+\ln(x)}}$ |

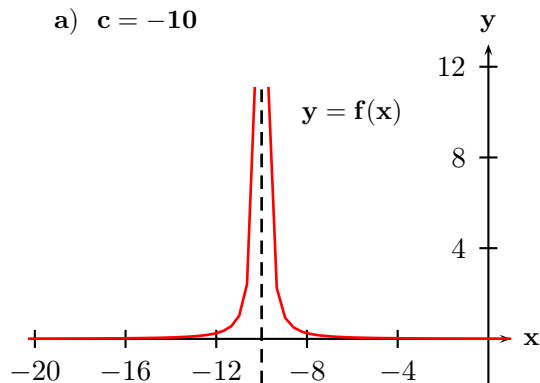
12. Um produto acaba de ser lançado no mercado. Prevê-se que, nos próximos anos, o preço P , em euros, seja dado em função de tempo t , em anos, por $P(t) = 100 + 3\ln(t + 2)$
- a) Qual o preço de lançamento?
 - b) Daqui a quantos anos é que o preço de venda será superior a 108 euros ?
 - c) Mostra que $P(t + 1) - P(t) = 3\ln\left(1 + \frac{1}{t + 2}\right)$, e interpreta o significado no contexto da situação apresentada.
13. A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que esta se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por $P(h) = 101e^{-0,12h}$.
- a) A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico- Açores.
A altitude do cume do Pico é de 2350 metros.
Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local?
 - b) Determine x tal que, para qualquer h , $P(h + x) = \frac{1}{2}P(h)$.

Limites e continuidade: noção de limite e interpretação geométrica; limites laterais; cálculo de limites; definição de continuidade e interpretação geométrica.

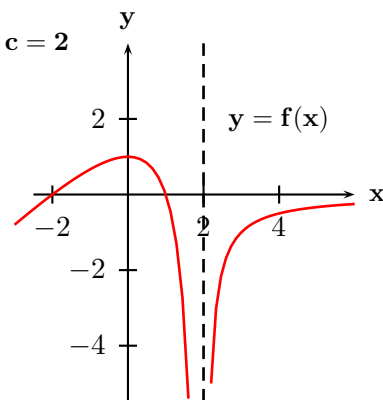
1. Utilize o gráfico da função $y = f(x)$ e o valor de c dado para determinar, caso exista, o valor das seguintes expressões:

a) $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ d) $f(c)$

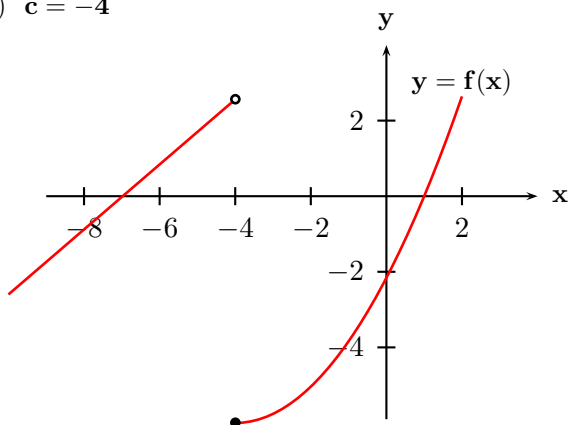
a) $c = -10$



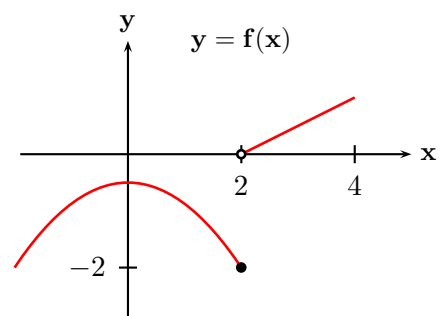
b) $c = 2$



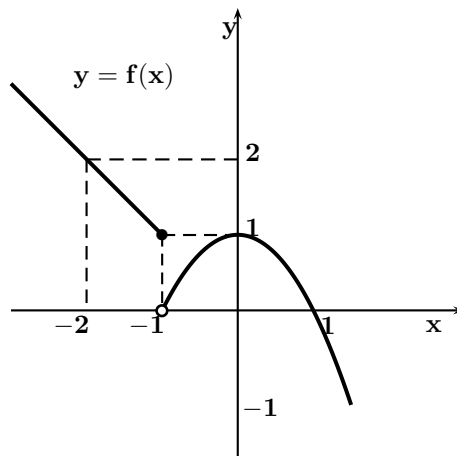
c) $c = -4$



d) $c = 2$



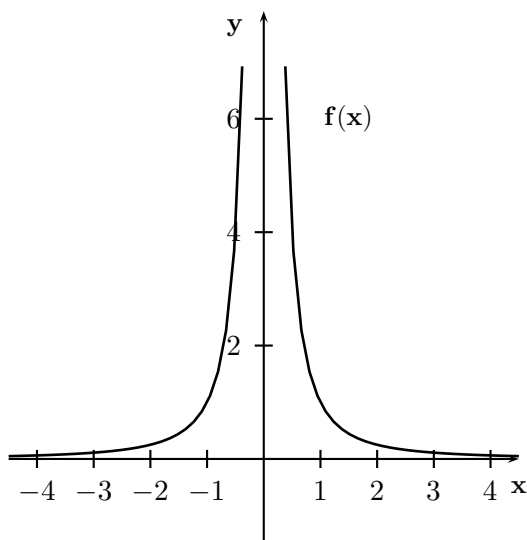
2. Considere a função cujo gráfico está representado na figura seguinte.



Determine, caso exista, o valor dos seguintes limites:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$.
- d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

3. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$, cujo gráfico está representado a seguir:



Calcule, caso exista, o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$.

4. Calcule os seguintes limites, caso existam, recorrendo ao gráfico das respectivas funções.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)$

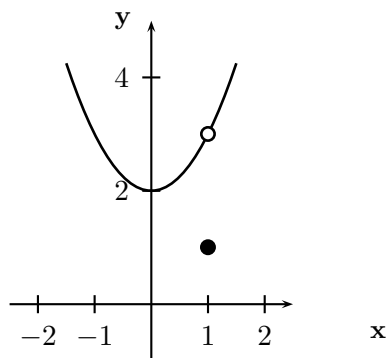
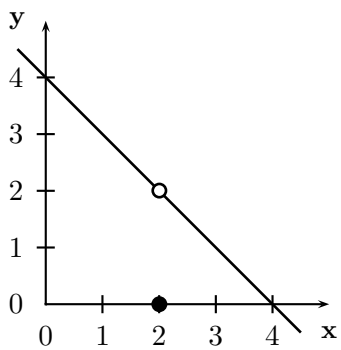
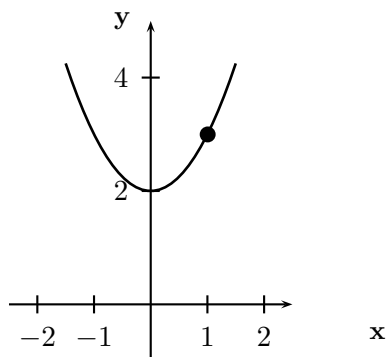
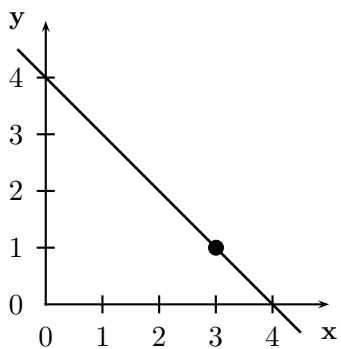
c) $\lim_{x \rightarrow 2} \begin{cases} 4 - x, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

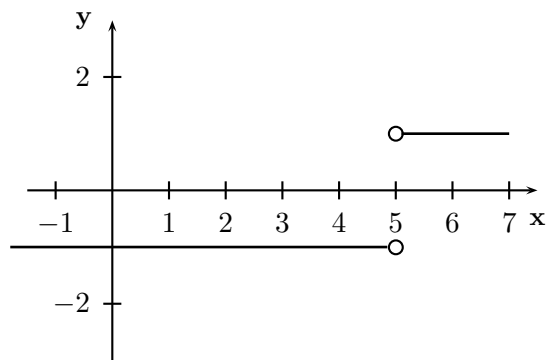
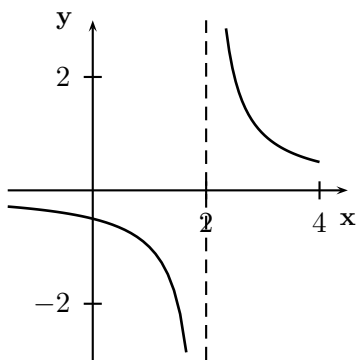
e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \begin{cases} x^2 + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x - 5|}{x - 5}$





5. Calcule, caso exista, o valor dos seguintes limites:

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$ | b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} \right)$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x} \right)$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x)$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^4 + x^3 + 1}{4x^4 - 1} \right)$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^5 + 2x^2 + x - 5}{7x^4 - x + 2} \right)$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 + x^2}}{x} \right)$ | h) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \right)$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{1}{x^3 + 1}}{\frac{4}{x^2}} \right)$ | j) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x - 3}$ |
| k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x})$ | l) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{2}{x + 1} - \frac{4}{x^2 - 1} \right)$ |

6. Calcule, caso exista, os seguintes limites:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) + e^x$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) + e^{x+1}$

7. Considere a função racional $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x + 1}$.

- Determine o domínio de f .
- Mostre que $f(x) = x + 2 + \frac{2}{x + 1}$.
- Calcule o valor dos seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Calcule o valor dos seguintes limites: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$.

8. Considere os gráficos representados no exercício 4. Indique, justificando, se as respectivas funções são contínuas.

9. Considere a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x + 1} & x < 0 \\ 4 & x = 0 \\ 2x^3 + 3 & x > 0 \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Estude a continuidade de f .

10. Estude a continuidade das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} & x > -1 \\ \frac{1 + \ln(x + 2)}{2} & x \leq -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\ln(x)} & x > 0 \\ 1 + \frac{1}{e^x} & x \leq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x > 0 \\ x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$

11. Sendo a e b números reais, considere a família de funções definida por:

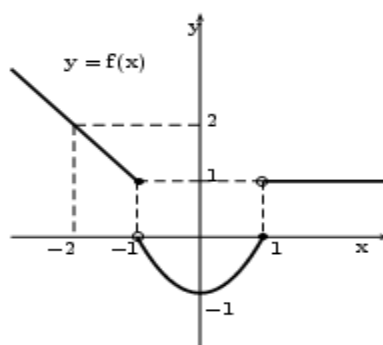
$$f(x) = \begin{cases} ax - b & x \leq -1 \\ -2x & -1 < x < 2 \\ bx^2 - a & x \geq 2 \end{cases}$$

Determine a e b de modo que f seja contínua em \mathbb{R} .

Definição de derivada de uma função num ponto e interpretação geométrica.

Regras de derivação.

1. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Calcule, pela definição, $f'(2)$.
2. Na figura está a representação gráfica de uma função f .



Diga justificando se são positivos, negativos ou nulos os seguintes valores:

$$f'(-2), f'\left(-\frac{1}{2}\right), f'(0), f'\left(\frac{1}{2}\right) \text{ e } f'(2).$$

3. Seja f uma função, tal que a sua derivada é dada por, $f'(x) = x(1 + 2\ln(x))$.

Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e}$

4. Determine a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = x^3(x^2 - 3)$

c) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 6}{x}$

d) $f(x) = \ln(3x^2 - 1)$

e) $f(x) = x - 1 + e^{x/2}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{2} - e^{x^4 + 3x^2 - 1}$

g) $f(x) = x \ln(x) + 1$

h) $f(x) = \ln(x^2) + e^{-2x}$

i) $f(x) = \frac{\ln(x)}{e^x} - x^4$

FORMULÁRIO

$$\cdot (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$\cdot (kf)' = kf', \text{ com } k \text{ constante}$$

$$\cdot (f \cdot g)' = f'g + g'f$$

$$\cdot (f^p)' = pf^{p-1}f'$$

$$\cdot \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\cdot (e^f)' = f'e^f$$

$$\cdot (\ln(f))' = \frac{f'}{f}$$

Estudo da monotonia e concavidades de uma função.

1. Seja g a função real de variável real, assim definida:

$$g(x) = x - 1 + e^{-x/2}$$

- a) Estude os intervalos de monotonia da função e os extremos;
 - b) Estude a concavidade da função e os pontos de inflexão.
2. Supondo que um fabricante pode vender x unidades de um artigo por semana, ao preço de $p(x) = 200 - 0,01x$ euros cada, e que a fabricação dessas x unidades lhe custa $y = 50x + 20000$ euros;
- a) Determine o lucro que a empresa obtém se produzir 300 unidades do artigo;
 - b) Quantas unidades do artigo aconselhariam ao dirigente da empresa para que este tenha um lucro máximo?
3. Um projectil é lançado verticalmente de baixo para cima. Admita que a altura h (em metros), t segundos após ter sido lançado, é dado por,

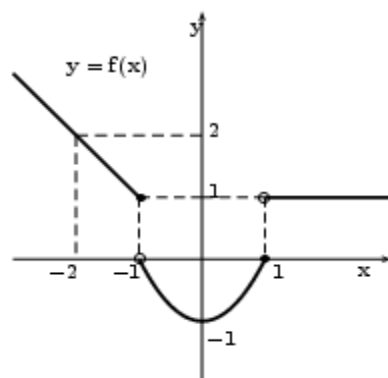
$$h(t) = 100t - 5t^2$$

- a) Determine a altura a que o projectil se encontra passados dois segundos após o seu lançamento;
 - b) Quanto tempo demorou o projectil a regressar ao solo?
 - c) Determine a altura máxima atingida pelo projectil;
 - d) Determine a velocidade do projectil, dois segundos após o seu lançamento.
4. Considere a função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$.

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

- a) Mostre que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(4e^2)$.
- b) Estude a monotonia e a existência de extremos da função f .

5. Na figura está a representação gráfica de uma função f .



Determine um intervalo onde $f''(x) > 0$ e $f'(x) < 0$.

6. Mostre que, $f(x) = ke^{kx-1}$, é monótona crescente qualquer que seja o valor de $k \neq 0$.

7. Numa fábrica, o custo total da produção mensal de q centenas de peças, expresso em dezenas de euros, é dado por:

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 21q + 1000$$

- Determine a função custo marginal, $C'(q)$, e calcule o seu valor para a 600ª peça.
- Estude a variação do custo total no intervalo $]0, 8[$. Qual o número de peças que aconselha ao fabricante para que o custo total seja mínimo?
- Estude as concavidades e os pontos de inflexão de C .

Assíntotas do gráfico de uma função. Estudo completo de uma função real de variável real.

1. Determine, se existirem, as assíntotas do gráfico das seguintes funções,

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

e) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

d) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

f) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definida por $f(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$;

a) Sem recorrer à calculadora, determine o conjunto dos números reais x tais que

$$f(x) \leq -1$$

Apresente a resposta final em forma de intervalo (ou união de intervalos).

b) O gráfico de f tem duas assíntotas. Escreva as suas equações.

3. De uma função f de domínio \mathbb{R}^+ , sabe-se que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2f(x) - x = 3$$

Determine, caso exista, a equação da assíntota oblíqua de f .

Conceito de sucessão. Limite de uma sucessão.

1. Dada a sucessão, $u_n = \frac{n+1}{2n-3}$, calcular:
 - a) u_1, u_5 e u_{10} ;
 - b) O 4º e o 7º termos;
 - c) u_p, u_{p+1} e u_{n+1} ;
 - d) $u_{n+2} - u_{n+1}$;
 - e) Classifique a sucessão, quanto a monotonia.
2. Calcule os três primeiros termos das seguintes sucessões:
 - a) $a_n = \frac{n+1}{3n-2}$;
 - b) $b_n = (-1)^n \cdot (n-1)$;
 - c) $c_n = \begin{cases} 4 & \text{se } n \geq 3 \\ n & \text{se } n < 3 \end{cases}$;
3. Considere a sucessão de termo geral $u_n = 5 - 3n$.
 - a) Estude a monotonia de u_n ;
 - b) Averigüe que u_n é uma progressão aritmética;
 - c) Calcule a soma dos 8 termos consecutivos da progressão a partir do 5º termo inclusive.
4. Considere as seguintes sucessões, e verifique que são progressões aritméticas:
 - a) $u_n = 4 + 3n$;
 - b) $a_n = \frac{1-4n}{2}$.
5. Prove que as sucessões cujos termos gerais se indicam são progressões geométricas:
 - a) $a_n = 6^{1-n}$;
 - b) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

6. Sabe-se que um certo capital C depositado durante um período de n anos, sendo i a taxa de juros composta nesse período, o capital acumulado ao fim desse tempo é

$S_n = C(1+i)^n$. Se forem depositados 5000 euros a prazo, à taxa anual de 10%. Ao fim de quanto tempo ter-se-á um capital acumulado de 6655 euros?

7. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3+x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = f\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Determine o termo geral de (u_n) .

8. Calcule os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n+1}$

9. Duas sucessões, (u_n) e (c_n) estão definidas por:

$$u_n = n^2 + 7n - 60 \text{ e } c_n = \frac{1}{n+12}$$

a) Indique os termos da sucessão u_n que verificam a condição $u_n < 0$;

b) Estude a sucessão $(u_n \times c_n)$ quanto á monotonia.

Geometria Analítica: Vectores no plano e no espaço, equação geral da recta e do plano, produto escalar e aplicações.

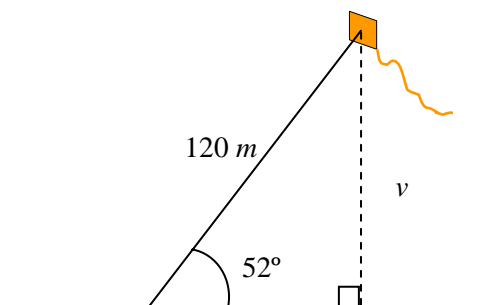
1. Considere no plano os pontos $A=(1,0)$, $B=(-1,2)$ e $C=(1,1)$.
 - a) Determine as coordenadas dos vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} ;
 - b) Calcule o perímetro do triângulo de vértices A, B e C ;
 - c) Determine a equação vectorial da recta AB .

2. Considere no espaço os pontos $A=(1,-1,1)$, $B=(-1,2,0)$ e $C=(1,0,1)$
 - a) Determine as coordenadas dos vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} ;
 - b) Determine as equações paramétricas e a equação vectorial da recta AB ;
 - c) Represente os pontos no espaço;
 - d) Comente a seguinte afirmação
“As rectas AB e BC definem o plano de equação $x+y-2z=1$ ”

3. Num referencial o.n. Oxy , as rectas AB e r são perpendiculares. O vector \overrightarrow{AB} tem coordenadas $(1-m, m, 4)$. A recta r é definida por: $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(-3, 2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$;
 - a) Identifique um ponto de r e o vector director da recta;
 - b) Determine o valor de m ;
 - c) Poderá a recta r estar contida no plano $x+y+z=1$?

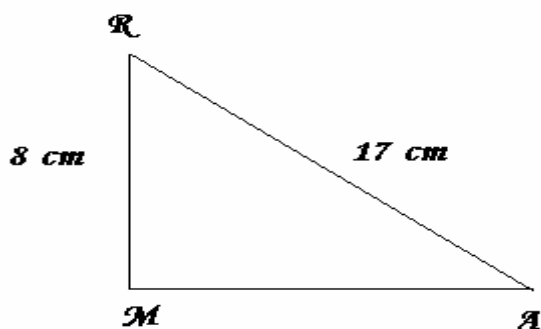
Razões trigonométricas.

1. Um papagaio de papel está suspenso por um fio com 120 m de comprimento. O ângulo de elevação do ponto mais alto do papagaio é de 52° , como se pode ver na figura.



Determine a distância (v) do papagaio ao solo.

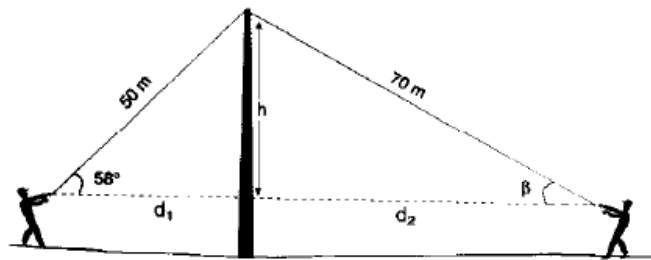
2. Num triângulo rectângulo se um dos catetos medir $\sqrt{3}$ cm e a hipotenusa medir $\sqrt{12}$ cm, quanto mede o outro cateto?
3. O triângulo [MAR] é rectângulo em M, $\overline{MR} = 8$ cm e $\overline{AR} = 17$ cm. Seja $\alpha = \hat{RAM}$ e $\beta = \hat{MRA}$,



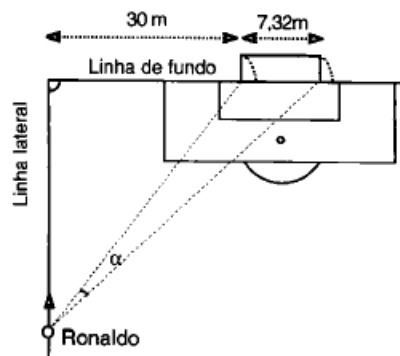
Determine:

- (a) \overline{MA} ;
- (b) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$;
- (c) $\sin \beta$, $\cos \beta$ e $\operatorname{tg} \beta$.

4. Considere um triângulo isósceles $[TRI]$, de base $[TR]$, onde $\angle T = 30^\circ$.
- Determine \overline{RI} , se $\overline{TR} = 10\sqrt{3}$ cm ;
 - Relacione \overline{RI} com \overline{TR} .
5. A sombra que um edifício projecta no solo às 16 horas mede, desde a base do edifício até ao extremo da sombra, 30 metros. Considerando que a inclinação do sol relativamente ao solo é de 60° , qual a altura do edifício em questão?
6. Sejam três casas A, B e C respectivamente. Suponha que $[CH]$ é perpendicular a $[AB]$, $\overline{BC} = 3$ km, $\overline{AH} = 2$ km e que α representa a amplitude do ângulo segundo o qual, de B, se vê A e C.
- Determine a distância entre as moradias A e B, se $\alpha = 60^\circ$.
 - Mostre que a área do terreno $[ABC]$ em função de α é dada por $3 \sin \alpha + 4.5 \cos \alpha \sin \alpha$.
7. Dois operários conseguem manter um poste vertical esticando dois cabos de aço com 50m e 70m respectivamente. Se o cabo mais curto faz 60° com a horizontal, a que distância estão os operários?



8. Cristiano Ronaldo, o melhor avançado do mundo, corre com a bola nos seus pés ao longo da linha lateral do campo de futebol, perseguindo de muito perto por um defesa da equipa adversária...Ronaldo quer rematar à baliza mas claro que só vai fazê-lo quando estiver nas melhores condições, isto é, quando o ângulo com que vê a baliza seja o maior possível. A que distância da linha de fundo vai ele rematar? Nesse instante, qual é o ângulo com que vê a baliza?



Funções Trigonométricas

1. Calcule o valor exacto de:
 - a) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{7\pi}{4} + \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \times \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$;
 - b) $\operatorname{sen} \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \pi \right) \times \operatorname{sen} \left(-8\pi + \frac{\pi}{4} \right)$;
 - c) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6} - 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$;
 - d) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + 2\cos \frac{17\pi}{4} - 3\operatorname{tg} 5\pi$.
2. De um ângulo agudo, α , sabe-se que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$. Determine o valor exacto de $\cos \alpha$ e $\operatorname{tg} \alpha$.
3. Exprima nas razões trigonométricas do ângulo α as seguintes expressões:
 - a) $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) \times \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{sen}(-\pi)$;
 - b) $\cos^2(-\alpha) + \operatorname{sen}^2(2\pi - \alpha) - 3\operatorname{sen}(-\pi + \alpha)$;
4. Sabe-se que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$, e que α é um ângulo agudo. Calcule o valor exacto de $\operatorname{sen}^2 \alpha$ e $\cos \alpha$.
5. Determine $\operatorname{sen} \alpha$, sabendo que $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ e $\alpha \in]\pi, 2\pi[$.
6. Para cada uma das seguintes funções indique o domínio e o contradomínio:
 - a) $f(x) = -2 + 2\cos x$;
 - b) $f(x) = -3 + 2\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$;
 - c) $f(x) = 1 + \operatorname{tg} x$.
7. Considere as funções reais de variável real $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.
 - a) Indique o domínio e o contradomínio de f e g ;
 - b) Calcule $f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) - g\left(-\frac{\pi}{2}\right) + g\left(\frac{8\pi}{3}\right) + 2g\left(\frac{13\pi}{6}\right)$;
 - c) Determine $x \in [-\pi, \pi]$, tal que:
 - i. $f(x) = \frac{1}{2}$;
 - ii. $g(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 - iii. $f(x) = g(x)$.
8. Resolva, em \mathbb{R} , as seguintes equações trigonométricas:
 - a) $1 + 2\cos(x) = 0$;

b) $\operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0;$

c) $\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x);$

d) $x \operatorname{sen} x = x;$

e) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1;$

f) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

9. Determine x tal que:

a) $x \in [0, \pi]$ e $2\operatorname{sen}(x) - 1 > 0;$

b) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\cos(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}.$

10. Considere a função $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}.$

a) Mostre que a função é ímpar;

b) Determine o domínio de f ;

c) Determine os zeros da função f .

11. Considere a função $f(x) = 1 - 3\operatorname{tg}^2(3x).$

a) Determine o domínio e o contradomínio de f ;

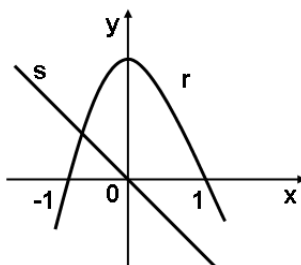
b) Determine os zeros de f ;

c) Mostre que, para todo o x pertencente ao domínio de f , $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x).$

REVISÕES

Escolha Múltipla

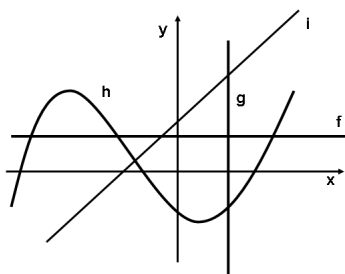
1. Na figura estão parcialmente representados os gráficos de duas funções polinomiais, r e s .



Quantos zeros tem a função $r.s$?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

2. Na figura estão representados quatro gráficos.



Um deles não representa uma função. Qual ?

- a) f b) g c) h d) i

3. O sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

tem solução :

- a) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ b) $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$ c) $\left(\frac{17}{7}, \frac{1}{7}\right)$ d) $(2, 1)$

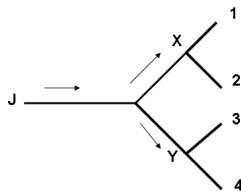
4. Dados os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2}x + 5 \geq 0\} \quad e \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2} - x > \sqrt{2}\}$$

Podemos afirmar que

- a) $A \cap B = A$ b) $A \cup B = A$ c) $B \supset A$ d) nenhuma das respostas anteriores

5. O João desloca-se ao longo de um caminho que, como a figura mostra, vai apresentando bifurcações.



O João nunca inverte o sentido de marcha.

Ao chegar a uma bifurcação opta 70% da vezes pelo caminho da esquerda. Sabendo que o João parte da posição J , qual é a probabilidade de chegar à posição 2 ?

- a) 0,14 b) 0,21 c) 0,42 d) 0,49

6. Considere todos os números de cinco algarismos tais que o primeiro algarismo é igual ao último. Quanto números de cinco algarismos deste tipo existem começados por um número ímpar?

- a) 3000 b) 4000 c) 5000 d) 6000

7. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} assim definida

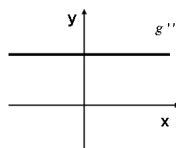
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Indique qual das expressões seguintes define o termo de (u_n)

- a) $e^{\frac{1}{n}}$ b) $\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$ c) $\ln\left(\frac{n}{1+n}\right)$ d) e^n

8. Na figura está representado o gráfico de g'' , segunda derivada de uma função g .



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

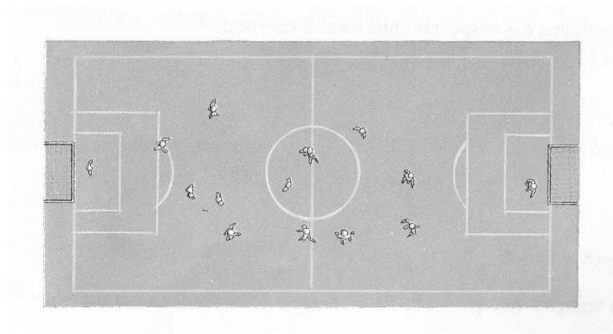
- a) O gráfico de g' é uma parábola com concavidade voltada para baixo.
- b) O gráfico de g' é uma parábola com concavidade voltada para cima.
- c) O gráfico de g' é uma recta com declive positivo.
- d) O gráfico de g' é uma recta com declive negativo.

Questões de resposta aberta

1. O António tem no seu estojo 7 lápis de cores diferentes, 1 caneta e duas borrachas (uma verde e uma branca). Sabendo que o António vai retirar do estojo um lápis, uma caneta e uma borracha, determine:
 - a) Quantas escolhas diferentes pode fazer ?
 - b) A probabilidade da borracha branca fazer parte da escolha do António.
2. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de um produto num determinado supermercado, o qual revelou que:
 - . 2% dos produtos estavam fora de prazo de validade e estragados.
 - . 73% dos produtos estavam dentro do prazo de validade e não estavam estragados .
 - . 80% dos produtos estavam dentro do prazo de validade (podendo ou não estar estragados).

Comente a seguinte afirmação: *“É mais provável comprar o produto dentro do prazo de validade e estar estragado do que comprar o produto fora do prazo e não estar estragado.”*

3. O Vítor tem um terreno rectangular onde normalmente joga futebol.



Inspirado no seu terreno inventou o seguinte problema:

“Se aumentasse o comprimento em 5m e se diminuísse a largura em 5m, a área não se alterava. Se aumentasse 5m a cada uma das dimensões, a área aumentaria $200m^2$.”

Quais são as dimensões do terreno do Vítor?

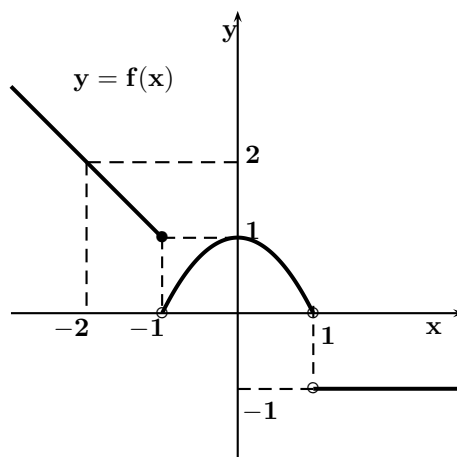
4. Para cada valor de k considere a equação do segundo grau,

$$x^2 + (k - 1)x - 10 = 0.$$

Determine o valor de k de modo que

- a) k seja solução da equação.
 - b) a equação tenha duas solução distintas.
5. Indique, **justificando convenientemente**, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
- a) Se num triângulo rectângulo, a medida (em centímetros) de um cateto é o dobro da medida do outro e a hipotenusa mede $\sqrt{5}$, então um dos catetos mede $1cm$.
 - b) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^6} - (-2^{-1})^2 = 1$
 - c) A equação $ax^2 + x + 1 = 0$ tem uma única solução se e só se $a = \frac{1}{4}$.
 - d) A intersecção da recta $2y + x = 1$ com a parábola de equação $y^2 + x = 0$ é o ponto $(x, y) = (-1, 1)$.

6. Na figura está representado o gráfico de uma função f .



- Determine o domínio e o contradomínio de f .
- Faça um esboço de $f(x - 1) + 1$.
- Determine, **caso seja possível**, um intervalo onde f seja:
 - injectiva e decrescente;
 - decrescente e negativa;
- Determine a expressão analítica de f .

7. Sabe-se que o custo total C (em milhares de euros) para produzir x centenas de peça de um determinado produto é dado por

$$C(x) = 3 - x^2 + 2x$$

- Qual o custo se não existir produção?
- Calcule $C(1)$ e interprete o resultado no contexto do problema.
- Determine o valor de x que maximiza o custo.
- Resolva analiticamente e geometricamente o sistema

$$\begin{cases} C(x) = y \\ x - y = -1 \end{cases}.$$

8. Numa certa localidade, o preço a pagar por mês pelo consumo de água é a soma das seguintes parcelas:

- . 3 euros pelo aluguer do contador,
- . 1 euro por cada metro cúbico de água consumido até 10 m^3 ,
- . 2 euros por cada metro cúbico de água consumido para além dos 10 m^3 .

- a) Determine a função que traduz correctamente o preço a pagar, em euros, em função do número x de metros cúbicos consumidos.
- b) Determine quanto paga uma pessoa que consuma 15 m^3 de água.

9. Quando se atira uma bola ao ar, a altura h (em metros), t segundos após ter sido lançada, é dada por

$$h(t) = 30t - 5t^2$$

- a) Fará sentido considerar qualquer valor real para t ?
- b) Determine a altura máxima atingida pela bola.
- c) Indique o intervalo de tempo em que a bola subiu.

10. Seja f uma função de domínio \mathbb{R}^+ , tal que a sua derivada é dada por

$$f'(x) = x(1 + \ln(x))$$

- a) Calcule, caso exista, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e}$.
- b) Estude f quanto ao sentido das concavidade e quanto à existência de pontos de inflexão.
- c) Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} y + f'(x) = x \ln(x) \\ y + e^x = e - x \end{cases}$$

11. O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa é dado, em função da distância d (em centímetros) da lupa ao objecto, por:

$$A(d) = \frac{5}{5 - d}.$$

Indique a que distância do objecto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

12. Sabe-se que o Lucro L (em milhares de euros) obtido por uma empresa, para produzir x **centenas** de unidades de um determinado produto é dado por

$$L(x) = -x^2 + 4x, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

- a) Justifique a seguinte afirmação: “*Se não existir produção não existe lucro.*”
- b) Determine o lucro que a empresa obtém se produzir 100 peças.
- c) Que número de peças aconselharia ao dirigente da empresa para que este tenha um lucro máximo? Justifique convenientemente a sua resposta.
- d) Resolva analiticamente e geometricamente o sistema

$$\begin{cases} L(x) = y \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

13. Um projectil é lançado verticalmente de baixo para cima .

Admita que a altura h (em metros), t segundos após ter sido lançado, é dado por

$$h(t) = 100t - 5t^2$$

- a) Determine a altura máxima atingida pelo projectil.
- b) Quanto tempo demorou o projectil a regressar ao solo?
- c) Determine analiticamente e geometricamente a solução do sistema

$$\begin{cases} h(t) = y \\ 50t - y = 0 \end{cases}.$$