

Variáveis Aleatórias

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Exemplo

No lançamento de duas moedas ao ar, os resultados possíveis são: FF, FC, CF ou CC. No entanto, o nosso interesse pode estar na quantidade de faces obtidas e não no resultado propriamente dito.

Variável Aleatória

Definição

Uma variável aleatória (v.a.) é uma função que atribui um valor numérico a cada resultado individual de uma experiência aleatória. Isto é,

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Exemplo

Denotemos por X a variável aleatória do exemplo anterior.

$X \equiv$

“número de faces obtidas num lançamento de duas moedas”.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$CC \rightarrow 0$$

$$CF \rightarrow 1 \quad \text{ou}$$

$$FC \rightarrow 1$$

$$FF \rightarrow 2$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega=CC \\ 1, & \text{se } \omega=CF,FC \\ 2, & \text{se } \omega=FF \end{cases}$$

Exemplo 1 (Exerc. 14b)

Uma caixa contém 5 parafusos defeituosos e 5 não defeituosos.
Extraem-se 2 parafusos sem reposição.

Considere os acontecimentos:

D_i = “Saiu parafuso defeituoso na i -ésima tiragem”

N_i = “Não saiu parafuso defeituoso na i -ésima tiragem”.

Os resultados possíveis para esta experiência aleatória são:

$$D_1 \cap D_2 \equiv DD$$

$$N_1 \cap D_2 \equiv ND$$

$$D_1 \cap N_2 \equiv DN$$

$$N_1 \cap N_2 \equiv NN$$

Considere a variável aleatória X = “número de parafusos não defeituosos obtidos”.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$DD \rightarrow 0$$

$$ND \rightarrow 1$$

$$DN \rightarrow 1$$

$$NN \rightarrow 2$$

ou

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega=DD \\ 1, & \text{se } \omega=ND, DN \\ 2, & \text{se } \omega=NN \end{cases}$$

Outros exemplos

- ⊙ As peças que saem de uma linha de produção são inspeccionadas e o seu estado é registado: boa ou com defeito. Quando é encontrada uma peça defeituosa a operação pára para se averiguar qual a causa do defeito. O número de peças inspeccionadas é uma variável aleatória.
- ⊙ O rendimento familiar mensal de um habitante de Viseu seleccionado ao acaso é uma variável aleatória.
- ⊙ O tempo de vida de uma pilha produzida no sector C de uma fábrica é uma variável aleatória.

Definição

Uma variável aleatória X diz-se discreta se o conjunto de valores possíveis de X for finito ou infinito numerável.

Exemplo

- ▶ O número de telemóveis com defeito numa produção de 100 telemóveis.
- ▶ O n.º de passageiros que fazem o check-in num balcão numa determinada hora

Definição

Seja X uma v.a. discreta. A **função de probabilidade** de X é uma função f_X que associa a cada valor possível x de X a sua probabilidade:

$$f_X(x) = P(X = x)$$

Esta função tem as seguintes propriedades:

- ▶ $0 \leq f_X(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- ▶ $\sum_{x_j} f_X(x_j) = 1$

Exemplo 1 (cont.)

Determine a função de probabilidade.

$$\begin{aligned}f_X(0) &= P(X = 0) = P(DD) = P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2|D_1) = \\ &= \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9} = 0.22(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_X(1) &= P(X = 1) = P(\{ND, DN\}) = P(N_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap N_2) = \\ &= P(N_1)P(D_2|N_1) + P(D_1)P(N_2|D_1) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{9} = 0.55(5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_X(2) &= P(X = 2) = P(NN) = P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2|N_1) = \\ &= \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9} = 0.22(2)\end{aligned}$$

Então a função de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}, & \text{se } x = 0 \vee x = 2 \\ \frac{5}{9}, & \text{se } x = 1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

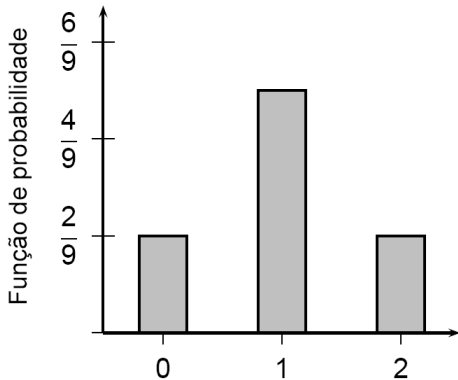
ou por

x	0	1	2
$f_X(x)$	$2/9$	$5/9$	$2/9$

Note que,

$$0 \leq f_X(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = 1$$

Representação gráfica da função de probabilidade do exemplo anterior:



Definição

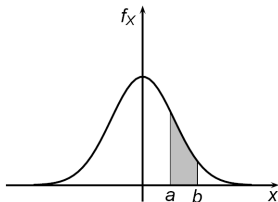
Uma variável aleatória X diz-se (absolutamente) contínua se existe uma função $f_X(x)$ não negativa ($f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$) e integrável com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1,$$

tal que:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$$

A função f_X é a **função densidade de probabilidade** (f.d.p.) da variável aleatória X .



Área a sombreado =

$$P(X \in]a, b]) = P(X \in]a, b[) = \\ P(X \in [a, b]) = P(X \in [a, b[)$$

A área total delimitada pela curva da função densidade e pelo eixo das abcissas é igual a um.

Para uma variável aleatória absolutamente contínua a probabilidade de $X = x_0$ é sempre igual a zero, isto é, $P(X = x_0) = 0$ qualquer que seja o ponto x_0 .

Exemplo 2 (Exerc. 15)

O director de compras da empresa "Baratinho", pretende definir uma política de aquisição de matéria prima para o próximo ano. As necessidades de matéria prima por dia (em toneladas) são uma variável contínua com função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - x/2, & 0 < x < k \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

Determine k de forma a que a função $f_X(x)$ seja uma função densidade de probabilidade:

Começaremos pela 1ª propriedade $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^k \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx + \int_k^{+\infty} 0 dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^k \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = 1 \Leftrightarrow \left[x - \frac{x^2}{4} \right]_0^k = 1 \Leftrightarrow k - \frac{k^2}{4} = 1 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \Leftrightarrow k = 2$$

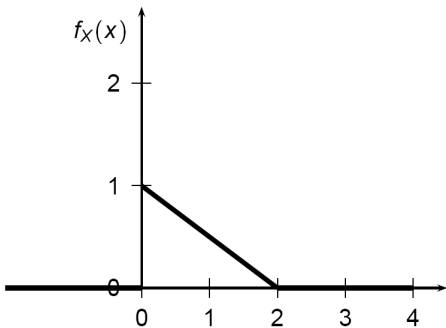
$$\text{Logo } f_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

Mostremos agora que $f_X(x)$ também satisfaz a 2ª propriedade ($f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{ll} \text{para } 0 < x < 2, & 0 < f_X(x) = 1 - \frac{x}{2} < 1 \\ \text{para outros valores} & f_X(x) = 0 \end{array}$$

Logo $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Na figura seguinte temos a representação gráfica de $f_X(x)$



Função de Distribuição

Definição

Chama-se função de distribuição (cumulativa) de uma variável aleatória X (discreta ou contínua) à função:

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

que satisfaz :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se X é absolutamente contínua, de

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

vem

$$F'_X(x) = f_X(x)$$

para todo o ponto x onde $F_X(x)$ é diferenciável.

Propriedades da função de distribuição

- ▶ F_X é uma função não decrescente, isto é,

$$a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b);$$

- ▶ $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0;$

- ▶ $F_X(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1;$

- ▶ F_X é uma função contínua à direita em qualquer ponto de \mathbb{R} , isto é,

$$\lim_{h \downarrow 0} F_X(x+h) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1 - cont.

Função de distribuição cumulativa:

Para os pontos $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$:

$$F_X(0) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = f_X(0) = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} F_X(1) &= P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = f_X(0) + f_X(1) \\ &= \frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_X(2) &= P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = 1 \end{aligned}$$

Exemplo 1 - cont.

Para outros valor de $x \in \mathbb{R}$

Se $x < 0$, tem-se $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$

Se $0 \leq x < 1$, tem-se

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = f_X(0) = \frac{2}{9}$$

Se $1 \leq x < 2$, tem-se

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = f_X(0) + f_X(1) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$$

Se $x \geq 2$, tem-se

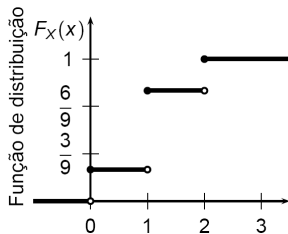
$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{2}{9} = 1 \end{aligned}$$

Exemplo 1 - cont.

Resumindo,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 2/9, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 7/9, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Graficamente,



A função de distribuição de uma variável aleatória discreta é uma função em escada, descontínua à esquerda nos pontos onde a variável aleatória toma valores

Exemplo 2 - cont.

Função de distribuição cumulativa:

Se $x < 0$, tem-se

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

Se $0 \leq x < 2$, tem-se

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^x f_X(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \left(1 - \frac{t}{2}\right) dt = 0 + \left[t - \frac{t^2}{4} \right]_0^x = x - \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

Exemplo 2 - cont.

Se $x \geq 2$, tem-se

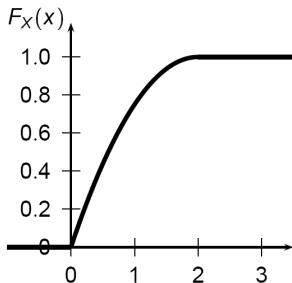
$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_X(t) dt + \int_0^2 f_X(t) dt + \int_2^x f_X(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \left(1 - \frac{t}{2}\right) dt + \int_2^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Exemplo 2 - cont.

Resumindo,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x - \frac{x^2}{4}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Graficamente,



A função de distribuição de uma variável aleatória (absolutamente) contínua, além de contínua à direita é contínua à esquerda em qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$, sendo por isso contínua em todo o ponto $x \in \mathbb{R}$

Exercício (Exemplo 2 - cont.)

Relembramos que X representa a necessidade diária de matéria prima da empresa "Baratinho" (em toneladas) e que a sua função densidade de probabilidade é:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

Se se quiser que a probabilidade de ruptura da matéria prima seja igual a 0.02, qual o nível de abastecimento que deve ser assegurado diariamente ?

Sol: 1.72 toneladas

As distribuições de probabilidade contêm toda a informação acerca das propriedades probabilísticas de uma variável aleatória.

No entanto, por vezes , é necessário sumariar algumas características através de uma medida. Uma dessas medidas é a média, valor esperado ou esperança matemática.

Definição

Denomina-se **média**, **valor esperado** ou **esperança matemática** de uma variável aleatória X , ao número μ_X ou $E(X)$ definido por:

$$E(X) = \mu_X = \sum_i x_i f_X(x_i),$$

se X é discreta com função de probabilidade f_X e tomando valores em $\{x_1, x_2, \dots\}$; ou por

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx,$$

se X é (absolutamente) contínua com função densidade de probabilidade f_X .

Na definição anterior, se a série, no caso discreto, não for convergente ou, no caso contínuo, se o integral não for convergente, dizemos que o valor esperado não existe.

Valor Esperado de uma função de X

Seja g uma f.r.v.r e $g(X)$ uma v.a. construída a partir de outra do mesmo tipo X

Definição

Se X é uma v. a. discreta podendo assumir os valores x_1, x_2, \dots , então

$$E(g(X)) = \mu_{g(X)} = \sum_i g(x_i) f_X(x_i)$$

onde f_X é a função de probabilidade da v. a. X .

Definição

Se X é uma v. a contínua, então

$$E(g(X)) = \mu_{g(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

onde f_X é a função densidade de probabilidade da v. a. X .

Exemplo/Exercício

Exercício

Calcule $E(X)$ para os exemplos anteriormente considerados.

Para o Exemplo 1: $E(X) = 1$

Para o Exemplo 2: $E(X) = 2/3$

Propriedades do valor esperado

Propriedades do Valor Esperado

Sejam X e Y variáveis aleatórias e a, b e c constantes reais.

Então:

- ▶ $E(c) = c$
- ▶ $E(cX) = cE(X)$
- ▶ $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$;
- ▶ Se $X(\omega) \leq Y(\omega) \forall \omega \in \Omega$, então $E(X) \leq E(Y)$

Definição

Seja X uma v.a. de valor esperado μ_X . Define-se a **variância de X** , σ_X^2 ou $\text{Var}(X)$, por

$$\text{Var}(X) \equiv \sigma_X^2 = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 f_X(x_i) = E \left((X - \mu_X)^2 \right),$$

se X é discreta com função de probabilidade f_X e tomando valores em $\{x_1, x_2, \dots\}$; ou por

$$\text{Var}(X) \equiv \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = E \left((X - \mu_X)^2 \right),$$

se X é (absolutamente) contínua com função densidade de probabilidade f_X

Na definição anterior, se a série, no caso discreto, não for convergente ou, no caso contínuo, se o integral não for convergente, dizemos que a variância não existe.

Exemplo/Exercício

Exercício

Calcule $Var(X)$ para os exemplos anteriormente considerados.

Para o Exemplo 1: $Var(X) = 4/9$

Para o Exemplo 2: $Var(X) = 2/9$

Propriedades da Variância

Propriedades da Variância

Seja X uma variável aleatória e a, b e c constantes reais. Então:

- ▶ $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- ▶ $Var(c) = 0$
- ▶ $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$;

Definição

À raiz quadrada positiva da variância chamamos desvio padrão e representamos por σ_X :

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Definição

(X_1, X_2, \dots, X_k) é um vector aleatório de dimensão k ou uma variável aleatória k -dimensional se X_1, X_2, \dots, X_k forem k variáveis aleatórias definidas sobre o mesmo espaço amostral Ω .

Nota:

Ao longo do semestre iremos trabalhar apenas com o caso bidimensional, isto é, vectores aleatórios de dimensão 2.

A distribuição de probabilidades do vector aleatório (X, Y) , pode ser caracterizada pela sua função de distribuição, à qual se dá o nome de **função de distribuição (cumulativa) conjunta das variáveis aleatórias X e Y** . Esta representa-se por $F_{(X,Y)}(\cdot, \cdot)$ ou por $F_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ e é definida por

$$F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)], \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

As funções de distribuição F_X e F_Y , de X e de Y , respectivamente, são designadas por **funções de distribuição marginais**.

Independência de Variáveis Aleatórias

O conceito de variáveis aleatórias independentes X e Y define-se de forma análoga ao conceito de independência de dois eventos A e B .

De forma intuitiva, X e Y são variáveis aleatórias independentes, quando o resultado de X não influenciara o resultado de Y , e vice-versa.

Duas variáveis aleatórias X e Y , com função de distribuição conjunta $F_{X,Y}$ são independentes se e só se

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

onde F_X e F_Y são as funções de distribuição marginais de X e de Y , respectivamente.

Algumas consequências...

Se X e Y são v.a. independentes, então:

- ▶ $E(XY) = E(X)E(Y)$
- ▶ $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$