

Departamento: Matemática**Complementos de Análise Matemática****Curso:** Engenharia de Sistemas e Informática**Ano:** 4º **Semestre:** 1º**Prova:** 1ª frequência **Época:** Normal**Ano Lectivo:** 2005/2006**Duração:** 1h30m+30m

21/11/2005 - 14h30m

1. Considere a função seguinte

$$f(x, y) = \frac{xy - y}{x^2 - x + 2xy - 2y}.$$

(a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.(b) Indique, justificando, se D_f é aberto, fechado, limitado ou compacto.(c) Determine, ou justifique se não existirem, os limites: $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} f(x, y)$ (d) Justifique que $g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & , \quad (x, y) \in D_f \\ \frac{2}{5} & , \quad (x, y) = (1, 2) \end{cases}$ é contínua.2. A pressão exercida sobre uma placa quadrada centrada no ponto $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ e com 5cm de lado é dada por $P(x, y) = x + x\sqrt{y + x^2}$.(a) Calcule o gradiente de P no ponto $(1, 1)$.(b) Determine a derivada direccional de P na direcção do vector calculado em (a).(c) Uma partícula desloca-se na placa segundo a trajectória $x(t) = t \wedge y(t) = \frac{4t^2}{25}$, $0 < t \leq 5$. Use a regra da cadeia para determinar a taxa de variação da pressão sobre a placa, relativamente ao tempo t , ao longo da trajectória.(d) Qual é a área da placa limitada por $y = 0$ e $y = \frac{4x^2}{25}$?(e) Calcule o integral $\int_R P(x, y) dA$, onde R é a região considerada na alínea anterior.(f) Determine a pressão média exercida sobre a placa, por unidade de área, nessa região R .3. Considere a função $G(a, w) = \frac{a}{a-w}$, definida se $0 < w < a$. Se $a = 12$ e $w = 5$, com erros máximos de 0.1 e 0.05 respectivamente, qual é o erro máximo no valor calculado de G ?4. A figura mostra um circuito contendo uma força electromotriz produzindo uma voltagem de $E(t)$ volts (V), um capacitor de capacitância de C farads (F) e um resistor com uma resistência de R ohms (Ω).

E

A queda da voltagem através do capacitor é Q/C , onde Q é a carga (em coulombs); nesse caso, a Lei de Kirchhoff fornece

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t),$$

onde $I(t)$ é a corrente em ampères (A) no tempo t . Mas sabe-se que

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Assim, temos

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t).$$

Suponha que a resistência é 5Ω , a capacitância é 0.05 F, a pilha fornece uma voltagem constante de 60 V e a carga inicial é $Q(0) = 0$ C. Encontre a carga e a corrente no tempo t .