Capítulo III

Conjuntos, relações e funções[1]

1 Conjuntos

A prática já tida com conjuntos familiariza com os axiomas seguintes:

Axioma da Extensão: Dois conjuntos são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos.

Axioma da Especificação: A cada conjunto A e a cada condição $S(x)$ corresponde um conjunto B cujos elementos são exatacmente os elementos de A para os quais $S(x)$ acontece. Escreve-se $B = \{x \mid x \in A \text{ e } S(x)\}$ ou $B = \{x \in A \mid S(x)\}$[2].

É bem conhecida a relação $\subseteq$ entre conjuntos:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$$

O *conjunto vazio* designa-se por $\emptyset$ ou $\{\,\}$.
O *conjunto universal* designar-se-á por E, a menos que seja explicitado o contrário.

[1] Para uma boa compreensão dos assuntos aqui tratados é necessária a participação nas aulas teóricas.
[2] Também se usa dois pontos, vírgula ou ponto e vírgula em vez de |.

Operações entre conjuntos

Operação		Significado	Diagrama de Venn
Intersecção	$\cap$	$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$	
Reunião	$\cup$	$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$	
Complementação	$.^c$	$x \in A^c \Leftrightarrow \neg(x \in A)$	
Diferença	$-$	$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B)$	

Lista síntese da relação entre operações lógicas e operações entre conjuntos:

equivalência	identidade
implicação	inclusão
conjunção	intersecção
disjunção	reunião
negação	complementação

Note-se ainda a correspondência existente entre os seguintes conjuntos e condições:

conjunto universal	condição universal
conjunto vazio	condição vazia

Observe o paralelismo existente entre as propriedades sobre operações entre conjuntos enumeradas na tabela seguinte e as propriedades sobre operações lógicas listadas na Tabela CP (na Secção 3 do Capítulo I).

Tabela PC

$A \cup A^c = E$ $A \cap A^c = \emptyset$	Lei da complementação Lei da exclusão
$A \cap E = A$ $A \cup \emptyset = A$	Leis da identidade
$A \cup E = E$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Leis da absorção
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Leis da idempotência
$(A^c)^c = A$	Lei da dupla complementação
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Leis da comutatividade
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Leis da associatividade
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Leis da distributividade
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	Leis de De Morgan

Escrevemos $\bigcup_{i \in I} A_i$ para designar a reunião dos conjuntos A_i, $i \in I$, isto é,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ se e só se } x \in A_i \text{ para algum } i \in I.$$

Analogamente, $\bigcap_{i \in I} A_i$ denota a intersecção dos conjuntos A_i, $i \in I$.

Se $I = \{1, 2, ..., n\}$, podemos escrever $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, respectivamente.

Exemplos.

$$\bigcup_{1 \le i \le 3} \{1^i, 2^i, 3^i\} = \{1, 2, 3, 4, 9, 8, 27\} \quad \text{(Verifique.)}$$

$$\bigcap_{1 \le i \le 3} \{1^i, 2^i, 3^i\} = \{1\} \quad \text{(Verifique.)}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}]-n, n[= \mathbb{R} \quad \text{(Verifique.)}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\} \quad \text{(Verifique.)}$$

1.1 Exercício: Determine $\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$.

Dois conjuntos A e B dizem-se *disjuntos* se $A \cap B = \emptyset$. Dados conjuntos A_i, $i \in I$, dizemos que eles são *disjuntos dois a dois* se para quaisquer $i, j \in I$, com $i \neq j$, se tem $A_i \cap A_j = \emptyset$.

1.2 Exercício: Em cada uma das seguintes alíneas, diga, justificando, se os conjuntos são ou não disjuntos dois a dois.
(a) $\{2,3,5\}$, $\{4,6,8\}$, $\{11,22\}$
(b) $\{2,3,5\}$, $\{2,4,6\}$, $\{1,7,9\}$

O *cardinal* de um conjunto finito é igual ao número de elementos do conjunto. O cardinal de um conjunto A designa-se por $\#A$, card$A$ ou $|A|$.

Se A e B são conjuntos finitos, tem-se

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)\,.$$

Para $A_1, ..., A_n$ disjuntos dois a dois, $\text{card}(A_1 \cup ... \cup A_n) = \text{card}A_1 + ... + \text{card}A_n$.

Sejam A e B conjuntos. O *produto cartesiano* de A por B, designa-se por $A \times B$ e é dado por

$$A \times B = \{(a,b) \,:\, a \in A \wedge b \in B\}\,.$$

Analogamente, podemos considerar o produto cartesiano de n conjuntos:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \,:\, a_1 \in A \wedge a_2 \in A_2 \wedge ... \wedge a_n \in A_n\}\,.$$

Por definição, $A^n = A \times A \times ... \times A$.

Exemplo. Para $A = \{1,2\}$ e $B = \{a,b,c\}$, tem-se que
$A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$.

Se A_1, A_2, ..., A_n são conjuntos finitos, então

$$\text{card}(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = \text{card}A_1 \times \text{card}A_2 \times ... \times \text{card}A_n\,.$$

Seja A um conjunto. O *conjunto potência de A* ou *conjunto das partes de A*, designado por $\mathbb{P}A$ ou 2^A, é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

Exemplo. $\mathbb{P}(\{1,2\}) = \{\,\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\,\}$.

Se A é finito, tem-se que

$$\text{card}(\mathbb{P}A) = 2^{\text{card}A}\,.$$

1.3 Exercícios

1. Para $S = \{2,a,3,4\}$, $R = \{a,3,4,1\}$, e E o conjunto universal, diga quais das seguintes proposições são verdadeiras.

(a) $a \in S$ (b) $a \in R$ c) $R = S$
(d) $\{a\} \subseteq S$ (e) $\{a\} \in S$ (f) $\emptyset \subseteq R$
(g) $\emptyset \subset R$ (h) $\emptyset \in R$ (i) $\{\emptyset\} \in R$
(j) $E \not\subset R$ (k) $R \subseteq S$ (l) $R \not\subset S$

2. Qual o cardinal dos conjuntos $\emptyset$, $\{a, b\}$, $\{999\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$?

3. Determine a reunião, a intersecção e a diferença de A e B, onde $A = \{2^n : n \text{ é inteiro}\}$ e $B = \{\frac{1}{n} : n \text{ é inteiro positivo}\}$

4. Determine $(X \cup Y)^c$, $X^c \cup Y^c$, $X \cup (Y \cap Z)$ e $(X \cup Y) \cap Z$, supondo que:

   (a) o conjunto univeral é $E = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, $X = \{2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 5\}$ e $Z = \{2, 5, 7\}$;

   (b) o conjunto universal é o conjunto N de todos os números inteiros positivos, $X =$ {números pares positivos}, $Y =$ {números inteiros de 1 a 7} e $Z = \{2, 5, 7, 8\}$.

5. Mostre que

$$(R \subseteq S) \wedge (S \subset Q) \Rightarrow R \subset Q$$

   É correcto substituir $R \subset Q$ por $R \subseteq Q$? Justifique.

6. (a) Desenhe um diagrama de Venn para dois conjuntos A e B. Determine $A \cap B$ e $A \cap B^c$. A que é igual a reunião de $A \cap B$ com $A \cap B^c$? Verifique que essa igualdade é satisfeita por quaisquer dois conjuntos A e B, usando propriedades das operações de conjuntos.

   (b) Siga um procedimento análogo ao da alínea anterior para concluir que $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$.

7. Prove as seguintes igualdades que fazem parte das propriedades das operações sobre conjuntos enumeradas na Tabela PC. O conjunto universal é designado por E.

$$A \cap A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap E = A, \quad A \cup E = E, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

8. Prove que a reunião de conjuntos é associativa.

9. Prove que $A \cap A^c = \emptyset$ e $A \cup \emptyset = A$.

10. Partindo das propriedades enumeradas na Tabela PC, prove que, para todo o $n \geq 0$,

    (a) $A \cap (\cup_{i=1}^n B_i) = \cup_{i=1}^n (A \cap B_i)$ (b) $A \cup (\cap_{i=1}^n B_i) = \cap_{i=1}^n (A \cup B_i)$

    (c) $(\cap_{i=1}^n A_i)^c = \cup_{i=1}^n A_i^c$ (d) $(\cup_{i=1}^n A_i)^c = \cap_{i=1}^n A_i^c$

11. Prove que um conjunto A está contido num conjunto B se e só se $A \cap B = A$, se e só se $A \cup B = B$.

12. Simplifique $(A \cup ((B \cup C)^c \cap A^c \cap (B \cap C)^c) \cup A)^c$.

13. (a) Dê exemplos de conjuntos A, B e C tais que $A \cup B = A \cup C$, mas $B \neq C$.
    (b) Prove que $A \cup B = A \cup C$ se e só se $B - A = C - A$.

14. Use propriedades da reunião, da intersecção e da complementação para provar que

$$A \cap (A^c \cup B) = A \cap B.$$

15. Mostre que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ sse $C \subseteq A$.

16. Use diagramas de Venn para mostrar que podemos ter

$$A \cup B \subset A \cup C \text{ mas } B \not\subseteq C$$
$$A \cap B \subset A \cap C \text{ mas } B \not\subseteq C$$
$$A \cap B = A \cap C \text{ mas } B \neq C$$

17. Por meio de diagramas de Venn, e supondo A e B conjuntos tais que $A \cap B \neq \emptyset$, identifique os conjuntos

$$B^c, \quad (A \cup B)^c, \quad B - A^c, \quad A^c \cup B, \quad A^c \cap B.$$

18. Mostre que $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

19. Prove que $(A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cap C) \cap (B \cap D)$, usando as relações da Tabela PC.

20. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Determine $A \times (A - \{2\})$ e A^2.

21. Dado $\#A = 4$. Determine $\#(A^3)$ e $\#(2^A)$.

22. Seja $A = \{0, 1, 2\}$. Determine $(A^2 - \{(0, 0)\}) \times A$.

23. Seja $A = \{3, 5, 7\}$ e $B = \{a, b\}$. Determine A^2, B^2, $A \times B$ e $B \times A$.

24. Seja A o conjunto de símbolos do alfabeto português e seja D o conjunto dos algarismos de 0 a 9.
    (a) Determine o número de *strings* de comprimento 3 sobre o alfabeto $A \cup D$.
    (b) Quantos desses *strings* começam com uma letra?

(c) Quantos *strings* de comprimento 4 ou menor começam com uma letra?

25. Prove que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

26. Considerando $N = \{1, 2, ...\}$, o conjunto S de nomes de ruas das cidades de um certo país e C o conjunto das cidades desse país para representar os tipos "cidade", "nome de rua"e "número", represente o tipo "endereço"por meio de um conjunto.

27. Seja A um tipo para todos os clientes e B um tipo para todos os produtos. Existe uma lista de pedidos, contendo o nome do cliente juntamente com o produto pedido. Sabendo que esta lista é para ser tratada como um conjunto, indique o tipo desta lista.

28. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$. Determine o conjunto potência $2^{A \cup B}$.

2 Relações

Sejam A_1, A_2, ..., A_n conjuntos e $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ o seu produto cartesiano. Uma relação R sobre $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ consiste num conjunto de n-uplos $(a_1, a_2, ..., a_n)$ com $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, ..., n$, ou seja, é dada por um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Como R é uma relação constituída por n-uplos, R diz-se uma relação n-ária.

Exemplo. Uma empresa vende determinados produtos que vamos designar por x, y, z e w. Os clientes são considerados do tipo a, b ou c de acordo com a quantidade de material comprada pelo cliente no último ano civil. Relativamente a um certo dia a empresa registou as vendas de acordo com a tabela seguinte

Cliente	Tipo	Produto	Preço
J. Costa	a	x	50
A. Santos	c	y	15
C. Cardoso	b	y	15
H. Barros	a	w	30

Considerando $C = \{\text{clientes}\}$, $T = \{a, b, c\}$, $P = \{\text{produtos}\}$ e $D = \{\text{preços dos produtos}\}$, associada a esta tabela temos uma relação quaternária constituída pelos seguintes elementos de $C \times T \times P \times D$:

(J. Costa, a, x, 50)
(A. Santos, c, y, 15)
(C. Cardoso, b, y, 15)
(H. Barros, a, w, 30)

2.1 Exercício. Um certo agregado familiar é constituído pelo Paulo, o Rui, o António, o Bernardo, a Marta, a Júlia, a Sara e a Inês, que, para simplificar, vamos designar por p, r, a, b, m, j, s e i, respectivamente. As suas relações familiares são as seguintes: Do António e da Júlia nasceram a Marta e a Sara. Da Marta e do Bernardo nasceram o Rui e a Inês. Da Sara e do Paulo nasceu a Júlia.

(a) Faça uma árvore descrevendo estas relações.

(b) Seja G o conjunto das pessoas deste agregado familiar. Escreva todos os ternos da relação $R = \{(x, y, z) \in G^3 : x \text{ é mãe de } y \text{ e } y \text{ é mãe de } z\}$.

No que se segue trataremos de um tipo especial de relações, as relações binárias (a que chamaremos simplesmente relações).

Sejam A e B dois conjuntos. Uma *relação* R de A para B é constituída por um conjunto de pares (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$. Se $(x, y) \in R$, dizemos que x é R-relacionado com y. Para exprimir que R é uma relação de A para$B$, escrevemos $R : A \leftrightarrow B$. A A chamamos *conjunto de partida* de R e a B chamamos *conjunto de chegada* de R.

Uma relação $R : A \leftrightarrow B$ pode ser vista como um subconjunto de $A \times B$. Assim, $A \times B$ é ele próprio uma relação, a *relação universal* de A para B. Por sua vez a *relação vazia* não contém nenhum par.

Exemplo. Seja P o conjunto das províncias de Portugal e C o conjunto das cidades portuguesas. Seja R a relação de P para C tal que, dados $x \in P$ e $y \in C$, x está R-relacionado com y se e só se a província x contém a cidade y. Deste modo, os pares (Beira Alta, Viseu) e (Algarve, Faro) pertencem à relação R, enquanto que o par (Minho, Viseu) lhe não pertence.

Existem várias maneiras de expressar relações. Como uma relação $R : A \leftrightarrow B$ é um subconjunto de $A \times B$, podemos expressar relações usando a notação dos conjuntos. Dada uma relação R também é habitual escrever

$$xRy$$

para significar $(x, y) \in R$. Por vezes usamos

$$x \not R y$$

com o significado de $\neg(xRy)$.

As relações finitas podem ser representadas por matrizes booleanas, isto é, matrizes cujas entradas são constituídas por 0's e 1's. Com efeito, sejam $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ e consideremos A e B ordenados segundo a ordem natural dos índices dos seus elementos. A matriz $m \times n$

$$M_R = (a_{ij}^R)$$

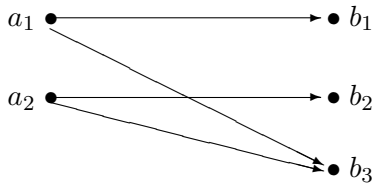
de uma relação $R : A \leftrightarrow B$ é definida por

$$a_{ij}^R = \begin{cases} 0 \text{ se } a_i \not R b_j \\ 1 \text{ se } a_i R b_j \end{cases} .$$

Exemplo. Sejam $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Consideremos os elementos de A e B ordenados pela ordem natural. Seja R a relação "é múltiplo de". A matriz desta relação é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As relações podem também ser representadas graficamente. Uma forma de representar uma relação $R : A \leftrightarrow B$ é colocar os elementos de A à esquerda, os de B à direita e, por cada $(x, y) \in R$, ligar x a y por meio de um arco dirigido. Por exemplo,



representa a relação $\{(a_1, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$ de $\{a_1, a_2\}$ para $\{b_1, b_2, b_3\}$.

Seja $R : A \leftrightarrow B$ uma relação. O *domínio* de R, abreviadamente, dom$R$, é dado por

$$\text{dom}R = \{x \in A : \exists_{y \in B}(x, y) \in R\} .$$

O *contradomínio* de R, abreviadamente, cdom$R$, é o seguinte subconjunto de B

$$\text{cdom}R = \{y \in B : \exists_{x \in A}(x, y) \in R\} .$$

Se A é um conjunto e R é uma relação de A para A, dizemos que R é uma *relação em* A ou *sobre* A. A relação $I_A = \{(x, x) : x \in A\}$ diz-se a *relação identidade* sobre A.

Novas relações a partir de relações dadas:

Se $R : X \leftrightarrow Y$ é uma relação, então a *relação inversa* $R^{-1} : Y \leftrightarrow X$ é constituída por todos os pares (y, x) tais que $(x, y) \in R$. Assim, $yR^{-1}x$ sse xRy. É claro que

$$(R^{-1})^{-1} = R .$$

Todas as operações feitas com conjuntos podem ser feitas com relações. Assim, dadas duas relações R e S com os mesmos conjuntos de partida e os mesmos conjuntos de chegada, tem-se:

$$x(R \cap S)y \Leftrightarrow xRy \wedge xSy$$

$$x(R \cup S)y \Leftrightarrow xRy \vee xSy$$

$$x(R - S)y \Leftrightarrow xRy \wedge x\not{S}y$$

$$x(R^c)y \Leftrightarrow x\not{R}y$$

Se $R : A \leftrightarrow B$ e $S : C \leftrightarrow D$ são duas relações tais que $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ e $R \subseteq S$, dizemos que

$$\begin{array}{rl} & S \text{ é uma } \textit{extensão} \text{ de } R \\ \text{e} & R \text{ é uma } \textit{restrição} \text{ de } S. \end{array}$$

Sejam $R : X \leftrightarrow Y$ e $S : Y \leftrightarrow Z$ duas relações. A *composição de R e S*, denotada por $R \cdot S$, tem X como conjunto de partida, Z como conjunto de chegada e é constituída por todos os pares (x, z) para os quais existe algum objecto $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in S$. Ou seja,

$$x(R \cdot S)z \Leftrightarrow \exists_{y \in Y}(xRy \wedge ySz)\,.$$

A composição de relações é associativa.

Seja R uma relação sobre um conjunto A. Geralmente abreviamos $R \cdot R$ por R^2, $R \cdot R \cdot R$ por R^3, etc.

Matrizes booleanas e representação de relações:

Nas matrizes booleanas o 1 corresponde a **V** (verdadeiro) e 0 corresponde a **F** (falso).

A *soma booleana* de duas matrizes booleanas $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ da mesma ordem, é dada por

$$A \bigvee B = (a_{ij} \vee b_{ij})\,.$$

O *produto booleano* de uma matriz booleana $A = (a_{ij})$ $m \times n$ por uma matriz booleana $B = (b_{ij})$ $n \times p$ é dado por

$$A \odot B = \left(\bigvee_{k=1}^{n} a_{ik} \wedge b_{kj} \right)\,.$$

Como já vimos, a matriz de uma relação é booleana. Se duas relações $R : X \leftrightarrow Y$ e $S : Y \leftrightarrow Z$ são representadas pelas matrizes M_R e M_S, respectivamente, então a matriz da relação $R \cdot S$ é

$$M_{R \cdot S} = M_R \odot M_S\,.$$

2.2 Exercícios

1. Sejam $R, S : A \leftrightarrow B$ relações de matrizes M_R e M_S, respectivamente. Determine as matrizes de $R \cup S$, $R \cap S$, R^c e R^{-1} em função de M_R e M_S.

2. Sejam $P = \{(1,2),(2,4),(3,3)\}$ e $Q = \{(1,3),(2,4),(4,2)\}$. Determine $P \cup Q$, $P \cap Q$, $\mathrm{dom}(P)$, $\mathrm{dom}(P \cup Q)$, $\mathrm{cdom}(P)$, $\mathrm{cdom}(Q)$ e $\mathrm{cdom}(P \cap Q)$.

3. Mostre que se P e Q são duas relações sobre um mesmo conjunto,

$$\mathrm{dom}(P \cup Q) = \mathrm{dom}(P) \cup \mathrm{dom}(Q)$$

e

$$\mathrm{cdom}(P \cap Q) \subseteq \mathrm{cdom}(P) \cap \mathrm{cdom}(Q).$$

4. Quais são os contradomínios das relações

$$S = \{(x, x^2) \,|\, x \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad T = \{(x, 2x) \,|\, x \in \mathbb{N}\}$$

onde $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$?

5. Seja M a relação "menor ou igual do que"e D a relação "divide". Ambas M e D estão definidas no conjunto $\{1,2,3,6\}$. Escreva M e D sob a forma de conjuntos e determine $M \cap D$.

6. Um grupo de pessoas está sentado à volta de uma mesa. Sabendo que xRy significa que x está sentado à direita de y, expresse a relação B em função de R sabendo que xBy significa que x está ou à direita ou à esquerda de y.

7. Sejam $R : X \leftrightarrow X$ e $S : U \leftrightarrow V$. Determine os conjuntos de partida de $R \cap S$, $R \cup S$ e R^c.

8. Seja xPy verdadeiro se x é pai ou mãe de y e seja xSy verdadeiro se x é irmã de y. Expresse a "relação tia"como composição destas duas relações.

9. Suponha que S é a relação $\subset$ como definida habitualmente para conjuntos. Determine S^c e S^{-1}.

10. Seja $R = \{(1,a),(2,b),(1,c)\}$ e $S = \{(a,A),(a,B),(c,D)\}$. Determine $R \cdot S$.

11. Seja $R = \{(1,2),(1,3),(3,4)\}$. Determine R^2 e R^3.

12. Seja xRy verdadeiro sse $x = y - 1$. Determine xR^2y e $x(R \cup R^2)y$.

13. Seja $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ sobre $\{1,2,3,4\}$. Determine M_R e M_{R^2}.

3 Propriedades das relações. Relações de equivalência

Seja R uma relação sobre um conjunto X. R diz-se:

reflexiva, se, para todo o $x \in X$, xRx;

irreflexiva, se, para todo o $x \in X$, $x \not R x$;

simétrica, se, para cada x e y em X, $xRy \Rightarrow yRx$;

anti-simétrica, se, para cada x e y em X com $x \neq y$, $xRy \Rightarrow y \not R x$; ou seja,
se xRy e yRy então $x = y$;

transitiva, se, para cada x, y e z em X, $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

3.1 Exercício. Caracterize a matriz de uma relação (sobre um conjunto finito)
(i) reflexiva; (ii) irreflexiva; (iii) simétrica; (iv) anti-simétrica.

Fechos

Seja R uma relação sobre um conjunto A.

De entre todas as relações reflexivas em A que contêm R existe uma que está contida nas outras todas, ou seja, é a menor relação reflexiva que contém R. O *fecho reflexivo* de R denota-se por $R^{(r)}$ e é precisamente a menor relação reflexiva em A que contém R. Analogamente se definem *fecho simétrico* e *fecho transitivo*, isto é, o primeiro é a menor relação simétrica que contém R e o segundo é a menor relação transitiva que contém R. Denotam-se por $R^{(s)}$ e R^+, respectivamente.

Por R^* denotamos a menor relação reflexiva e transitiva contendo R.

Facilmente se concluem as seguintes igualdades:

$R^{(r)} = R \cup I_A$

$R^{(s)} = R \cup R^{-1}$

$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup ... \cup R^m$, supondo que R é sobre um conjunto A tal que $|A| = m$.

$R^* = R^+ \cup R^0$, denotando por R^0 a relação identidade sobre A.

3.2 Exercício Prove que se R é uma relação sobre um qualquer conjunto, finito ou infinito, então $R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$.

Relações de equivalência

Uma relação R sobre um conjunto diz-se uma *relação de equivalência* se for reflexiva, simétrica e transitiva.

Uma *partição* dum conjunto S é uma família $(A_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de S, tal que cada elemento de S está em exactamente um dos conjuntos A_i; ou seja, para cada $s \in S$, existe um e só um $i \in I$ tal que $s \in A_i$.

Teorema. *Seja R uma relação de equivalência em S, e seja $[x]$ o conjunto de todos os $y \in S$ R-relacionados com x, i.e., $[x] = \{y : yRx\}$. Então os subconjuntos $[x]$ de S determinam uma partição de S.*
Reciprocamente, toda a partição de um conjunto S determina uma relação de equivalência.

Aos conjuntos $[x] = \{y : yRx\}$ determinados por uma relação de equivalência R chamamos *classes de equivalência* da relação R.

Exemplo. Seja R a relação no conjunto dos números inteiros tal que aRb se e só se $|a| = |b|$. Verifica-se facilmente que se trata de uma relação reflexiva, simétrica e transitiva, sendo portanto uma relação de equivalência. As classes de equivalência correspondentes são dadas por $[a] = \{-a, a\}$, para cada inteiro a.

Seja n um inteiro positivo. Dois números inteiros a e b dizem-se *congruentes módulo* n, escrevendo-se $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, n)$, quando $a - b$ é múltiplo de n. Verifique que a relação de congruência é uma relação de equivalência. Quais são as classes de equivalência?

3.3 Exercícios

1. Indique todas as propriedades das seguintes relações sobre o conjunto $\{1, 2, 3\}$. Quais delas são relações de equivalência?

   (a) $R_1 = \{(1, 2), (2, 2)\}$

   (b) $R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1)\}$

   (c) $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

   (d) $R_4 = \{(1, 2), (2, 3)\}$

2. Indique todas as propriedades da relação identidade, da relação vazia e da relação universal.

3. Dê um exemplo de uma relação que seja ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica.

4. Mostre que, se S e R são relações reflexivas, então $R \cup S$ e $R \cap S$ também são reflexivas.

5. Se as relações R e S são reflexivas, simétricas e transitivas mostre que $R \cap S$ é também reflexiva, simétrica e transitiva.

6. Seja $R = \{(1,2),(4,3),(2,2),(2,1),(3,1)\}$ uma relação sobre $S = \{1,2,3,4\}$. Determine o fecho simétrico, o fecho reflexivo e o fecho transitivo de R.

7. Dado $S = \{1,2,3,...,10\}$ e a relação $R = \{(x,y) \,|\, x + y = 10\}$ sobre S, quais as propriedades de R?

8. (a) Quais são as entradas da matriz de $R \cap R^{-1}$ que poderão ser não nulas se R for uma relação anti-simétrica?

   (b) Se R for uma relação reflexiva e anti-simétrica sobre um conjunto de cardinalidade n, qual é a matriz de $R \cap R^{-1}$?

9. Determine as matrizes das relações R^{-1}, R^2, R^3 e $R \cdot R^{-1}$, sabendo que R é uma relação no conjunto $\{a,b,c\}$ cuja matriz é

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Prove que S^{-1} é uma relação de equivalência se e só se S é uma relação de equivalência.

11. Sejam R e S duas relações de equivalência representadas pelas matrizes

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

    respectivamente. Mostre que $R \cdot S$ não é uma relação de equivalência.

12. (a) Mostre que dois números inteiros a e b são congruentes módulo n se e só se o resto da divisão de a por n é igual ao resto da divisão de b por n.

    (b) Mostre que a relação de congruência módulo n entre números inteiros é uma relação de equivalência.

    (c) Descreva as classes de equivalência dessa relação de equivalência.

13. Prove que se R e S são duas relações de equivalência que têm as mesmas classes de equivalência, então a sua composição é uma relação de equivalência.

14. Para cada uma das seguintes relações, indique as suas propriedades. Diga se a relação é reflexiva, irreflexiva, simétrica, anti-simétrica ou transitiva. Determine também se a relação é uma relação de equivalência. Todas as relações são no conjunto de todos os humanos.

    (a) xRy representa que x é filho de y.

(b) xRy representa que x é descendente de y.

(c) xRy representa que x é o marido de y.

(d) xRy representa que x é a cônjugue de y.

(e) xRy representa que x e y têm os mesmos pais (pai e mãe).

(f) xRy representa que x é tão alto ou mais baixo do que y.

15. O que podemos concluir sobre uma relação cuja matriz é triangular superior?

16. Para cada uma das relações seguintes, indique se é reflexiva (r), irreflexiva (i), simétrica (s), anti-simétrica (a), ou transitiva (t).

    (a) Sejam x e y números inteiros e xRy verdadeira se x divide y.

    (b) Sejam x e y pessoas e xRy verdadeira se x e y pertencem ao mesmo agregado familiar.

    (c) Sejam x e y rapazes e xRy verdadeira se x e y são irmãos ou $x = y$.

    (d) Sejam x e y pessoas e xRy verdadeira se x e y são primos.

17. Indique, justificando, quais das relações dadas no exercício anterior são de equivalência.

18. Seja $R = \{(a, b), (b, d), (c, b), (d, a)\}$. Determine a matriz da relação. Determine ainda

    (i) a matriz do fecho reflectivo,

    (ii) a matriz do fecho simétrico,

    (iii) a matriz do fecho transitivo.

4 Ordens parciais

Uma relação R sobre um conjunto S diz-se uma *ordem parcial (fraca)* se for reflexiva, anti-simétrica e transitiva; R diz-se uma *ordem parcial estrita* se for irreflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Um conjunto A com uma ordem parcial R diz-se um *conjunto parcialmente ordenado* (ou *poset*). Denotamo-lo por (A, R) ou simplesmente por A se não houver ambiguidade sobre a ordem R que estamos a considerar.

Se R for uma ordem parcial estrita, o seu fecho reflexivo é uma ordem parcial fraca. Por exemplo, a relação $<$ entre números inteiros é uma relação de ordem estrita (Justifique). O seu fecho reflexivo é precisamente a relação $\leq$.

Por outro lado, se R for uma ordem parcial em A, então $R - I_A$ é uma ordem parcial estrita.

Uma ordem parcial R sobre A diz-se uma *ordem total* ou *ordem linear* se, para todos os x, y em A se tem sempre que xRy ou yRx. Neste caso, o poset (A, R) diz-se *conjunto totalmente ordenado* ou *cadeia*.

Exemplos de cadeias são os números naturais, os números inteiros e os números reais, cada um destes conjuntos considerado com a relação $\leq$.

Seja $\preceq$ uma ordem parcial em A. Denotamos por $\prec$ a correspondente ordem parcial estrita, i.e., a ordem parcial estrita obtida de $\preceq$ tirando-lhe todos os pares (x, x) com $x \in A$.

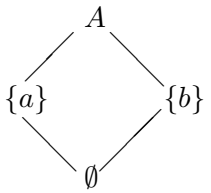
A inversa de $\prec$ denota-se por $\succ$ e a inversa de $\preceq$ denota-se por $\succeq$. Se $(A, \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, $(A, \succeq)$ também é um conjunto parcialmente ordenado e diz-se o *dual de* $(A, \preceq)$.

Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se $x \prec y$, dizemos que x é um *predecessor* de y, ou que y é um *sucessor* de x. Se $x \prec y$ e não existem elementos entre x e y, i.e., não existe nenhum $z \in A$ tal que $x \prec z \prec y$, dizemos que x é um *predecessor imediato* de y, ou que y é um *sucessor imediato* de x.

Um conjunto parcialmente ordenado pode ser representado por um *diagrama de Hasse*: representamos os elementos do conjunto e sempre que x é um predecessor imediato de y ligamos x a y por um arco com x situado num nível inferior a y.

Claro que o diagrama de Hasse de uma cadeia é muito simples. Por exemplo, o diagrama de Hasse do conjunto $\{1, 2, 3\}$ com a relação $\leq$ habitual é

Para $A = \{a, b\}$, o diagrama de Hasse do poset $(\mathbb{P}A, \subseteq)$ é



Conjuntos parcialmente ordenados bem-fundados

Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Uma sequência (finita ou infinita) $< x_1, x_2, ... >$ em A diz-se uma *sequência estritamente decrescente* relativamente à ordem $\preceq$ se satisfizer $x_i \succ x_{i+1}$ para todo i.

Um poset $(A, \preceq)$ diz-se *bem-fundado* se não tiver sequências estritamente decrescentes infinitas.

Exemplos.

1. No poset $(\mathbb{Z}, \leq)$, a sequência $< 2, 1, -2, -10 >$ é estritamente decrescente.

   É claro que $(\mathbb{Z}, \leq)$ tem sequências estritamente decrescentes infinitas (dê um exemplo), pelo que não é bem-fundado.

   Por outro lado, $(\mathbb{N}, \leq)$ é bem-fundado (justifique).

2. Relativamente a $(\mathbb{P}A, \subseteq)$, com $A = \{a, b, c\}$, um exemplo de sequência estritamente decrescente é $< A, \{a, b\}, \{b\}, \{\,\} >$. Trata-se obviamente de um poset bem-fundado, já que o respectivo conjunto é finito.

   Mas se $\mathbb{P}A$ for infinito, isso já não acontece. Por exemplo, a sequência

   $$< \mathbb{N} - \{0, 1\}, \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}, ... >$$

   onde o i-ésimo termo é $\mathbb{N} - \{0, 1, ..., i\}$, é uma sequência estritamente decrescente infinita e, portanto, $(\mathbb{P}\mathbb{N}, \subseteq)$ não é bem-fundado.

Ordens parciais em produtos cartesianos

Sejam $(A_1, \leq_1)$ e $(A_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados. Indicamos a seguir dois tipos de ordem parcial que podemos obter para $A_1 \times A_2$ a partir de $\leq_1$ e $\leq_2$:

1. $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ sse $x_i \leq_i y_i$ para $i = 1, 2$.

2. A chamada *ordem lexicográfica* é dada por: $(x_1, x_2) \preceq_l (y_1, y_2)$ sse $x_1 <_1 y_1$ ou $x_1 = y_1$ e $x_2 \leq_2 y_2$, onde $<_1$ designa a relação de ordem parcial estrita correspondente a $\leq_1$.

Analogamente podemos definir ordens parciais para produtos cartesianos de 3, 4, ... conjuntos.

Por exemplo, se $(A_i, \leq_i)$ são conjuntos parcialmente ordenados para $i = 1, 2, 3$, então a respectiva ordem lexicográfica em $A_1 \times A_2 \times A_3$ é dada por:
$(x_1, x_2, x_3) \preceq_l (y_1, y_2, y_3)$ sse $(x_1 <_1 y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 <_2 y_2) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 \leq_3 y_3)$.

4.1 Exercícios

1. Averigue se as relações dadas nas alíneas dos exercícios 1, 14 e 16 de 3.3 são relações de ordem fraca ou estrita.

2. Considere a relação XRY sse $X \subseteq Y$, no conjunto $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

   (a) Mostre que R é uma relação de ordem parcial

   (b) Faça o seu diagrama de Hasse.

3. Considere a relação $x \sqsubseteq y$ sse "x divide y".
   (a) Mostre que é uma relação de ordem parcial.
   (b) Será total?
   (c) Faça o seu diagrama de Hasse.

4. O conjunto $\mathbb{N}$ é bem-fundado relativamente à relação $\leq$. E relativamente à relação $\geq$?

5. Considere o conjunto parcialmente ordenado constituído por $\mathbb{Z}$ com a relação $\leq$. Trata-se de um conjunto bem-fundado? E se em vez de $\leq$ considerarmos $\geq$?

6. (a) Dados conjuntos parcialmente ordenados $(A_1, \leq_1)$ e $(A_2, \leq_2)$, mostre que a relação definida no conjunto $A_1 \times A_2$ por $(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$ sse $x_i \leq_i y_i$ para $i = 1, 2$.é efectivamente uma ordem parcial.
   (b) Mostre que se $(A_i, \leq_i)$ são conjuntos totalmente ordenados para $i = 1, 2, 3$ então $A_1 \times A_2 \times A_3$ com a respectiva ordem lexicográfica é também um conjunto totalmente ordenado.
   Generalize este resultado a n conjuntos A_i.

5 Funções

Uma relação binária $f \subseteq A \times B$ diz-se uma *função* se para cada $x \in A$ existir um e um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Uma relação $(n+1)$-ária $g \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \times B$ diz-se uma função se para cada $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, existir um e um só $y \in B$ tal que $(x_1, x_2, ..., x_n, y_n) \in g$.

Notações. Usualmente para significar que $(x, y) \in f$, escrevemos $f(x) = y$ ou $f : x \mapsto y$. Se f é uma função de A para B, escrevemos $f : A \to B$.

De notar que o *domínio* e o *contradomínio* de uma função f no sentido já conhecido coincidem com o domínio e contradomínio de $f$considerada como uma relação. Portanto, dada uma função $f : A \to B$, $\mathrm{dom} f = A$ e $\mathrm{cdom} f = \{y \in B \mid \exists x \in A(y = f(x))\}$.

Algumas funções importantes

1. *Função identidade*: A função identidade num conjunto A é a função $I_A : A \to A$ definida por $f(x) = x$ para todo o $x \in A$, coincidindo portanto com a relação identidade.

2. *Função constante*: é uma função tal que todos os elementos do domínio têm a mesma imagem.

3. *Função característica*: A *característica* de um número real x é o maior número inteiro que é menor ou igual a x e denota-se por $[x]$. Assim, por exemplo, $[-\frac{3}{2}] = -2$, $[-0.24] = -1$ e $[2.5] = 2$. A função característica faz corresponder a cada número real x a sua característica $[x]$.

4. *Função módulo n*: Dados um número inteiro x e um inteiro positivo n, existem um inteiro y e um natural r com $0 \leq r < n$, tais que $x = yn + r$, sendo y e r únicos. Como é bem sabido, y é o quociente da divisão de x por n e r é o resto dessa divisão. Facilmente se conclui que $y = [\frac{x}{n}]$. O resto da divisão de x por n diz-se x módulo n e representa-se por $x \bmod n$. Por exemplo, $8 \bmod 3 = 2$ e $-8 \bmod 3 = 1$. A função módulo n faz corresponder a cada número inteiro x, o número $x \bmod n$. A igualdade seguinte relaciona a função módulo n com a função característica:

$$x \bmod n = x - [x/n]\, n\,.$$

Recorde que uma função $f : A \to B$ diz-se:

- *injectiva*, se quaisquer dois elementos distintos do domínio têm imagens diferentes, i.e., $\forall_{x,\, x' \in A}\, (f(x) = f(x') \to x = x')$;
- *sobrejectiva*, se todo o elemento do conjunto de chegada é imagem de algum elemento do domínio, expresso doutro modo, se $\forall_{y \in B}\, \exists_{x \in A}\, (f(x) = y)$;
- *bijectiva*, se for injectiva e sobrejectiva, ou seja, $\forall_{y \in B}\, \exists^1_{x \in A}\, (f(x) = y)$.

Funções parciais

Uma relação binária $f \subseteq A \times B$ diz-se uma *função parcial* se para cada $x \in A$ existir quando muito um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Por exemplo, a relação $\{(2, a), (3, a), (4, b)\}$ é uma função parcial de $\{1, 2, 3, 4\}$ para $\{a, b\}$.

Claro que uma função é, em particular, uma função parcial. De uma função parcial podemos obter uma função restringindo o conjunto de partida ao domínio da função parcial.

Composição de funções

A composição de funções define-se como a das relações. Se tivermos duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, a relação composição de f com g é sempre uma função. Mas atenção: a notação usada para as funções é diferente da usada para as relações; nomeadamente, se usarmos $\cdot$ como símbolo da composição entre funções e utilizarmos $\cdot_r$ como símbolo da composição entre relações, temos $g \cdot f = f \cdot_r g$. Portanto, para cada $x \in A$,

$$(g \cdot f)(x) = g(f(x))\,.$$

Tal como a composição de relações, a composição de funções é associativa.

Podemos considerar uma composição de funções mais geral do que a descrita acima: basta que o contradomínio de f seja um subconjunto do domínio de g, ou seja, basta que $g(f(x))$ esteja definido para todo o x do domínio de f.

É também possível fazer a composição de funções parciais. Dadas uma função parcial f de A em B e uma função parcial g de B em C, a composição $g \cdot f$ das duas é a função parcial de A em C tal que $\text{dom}(g \cdot f) = \{x \in A \,|\, x \in \text{dom} f \text{ e } f(x) \in \text{ dom} g\}$ e que a cada x do seu domínio faz corresponder $g(f(x))$.

Por exemplo, sejam f e g as funções parciais definidas de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ por $f(x) = x+1$ e $g(y) = 1/y$. Então a sua composição faz corresponder a cada $x \neq -1$ o número $g(f(x)) = \frac{1}{x+1}$.

Visto que uma função é uma relação, podemos falar da sua relação inversa. Assim, por exemplo, a relação $\{(1,2),(2,3),(3,3)\}$ é uma função de $X = \{1,2,3\}$ em X e a sua relação inversa é $\{(2,1),(3,2),(3,3)\}$. Mas esta relação não é uma função: a 3 correspondem duas "imagens".

Dizemos que uma função f tem inversa, ou é *invertível*, se a sua relação inversa for uma função, que se diz então a *função inversa de* f.

É evidente que uma função não injectiva não tem inversa. (Porquê?)

Uma função que não seja sobrejectiva também não tem inversa. (Porquê?)

Portanto, podemos concluir que uma função para ter inversa tem de ser bijectiva. A recíproca também é verdadeira. Na verdade, se $f : A \to B$ é uma função bijectiva, $f^{-1} : A \to B$ define-se fazendo corresponder a cada $y \in B$ o único x de A tal que $f(x) = y$.

Se uma função $f : A \to B$ é bijectiva, a sua inversa, $f^{-1} : B \to A$, também o é. (Porquê?) Além disso, $f \cdot f^{-1} = I_B$ e $f^{-1} \cdot f = I_A$.

Se uma função $f : A \to B$ é injectiva mas não sobrejectiva, podemos considerar uma inversa parcial. Por exemplo, a função $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sin x$, para cada x, é injectiva mas não é sobrejectiva; no entanto, restringindo o conjunto de chegada de f a $[-1, 1]$, obtemos a inversa $g : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ que a cada $x \in [-1, 1]$ faz corresponder $\arcsin x$.

Cardinal de um conjunto

É bem sabido que um conjunto finito tem cardinal n se e só se existir uma bijecção entre esse conjunto e o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. É também claro que dois conjuntos finitos têm o mesmo cardinal sse existir uma função bijectiva entre eles. Vamos estender a noção de cardinal a conjuntos finitos.

Dois conjuntos A e B dizem-se *equipotentes* se existir uma função bijectiva de A para B. Note-se que a relação $\sim$ entre conjuntos dada por

$$A \sim B \Leftrightarrow (\text{existe uma função bijectiva de } A \text{ para } B)$$

é uma relação de equivalência. Portanto, dois conjuntos são equipotentes se pertencerem à mesma classe de equivalência dessa relação.

Dizemos que dois conjuntos A e B têm o mesmo *cardinal* sse forem equipotentes. Escreve-se então card$A$ =card$B$.

Exemplos.

1. car($\mathbb{N}$)=card($\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\}$); uma função que o permite concluir é a que faz corresponder a cada número natural o seu dobro. (Verifique.)

   Analogamente, o cardinal do conjunto dos naturais ímpares é igual ao de $\mathbb{N}$ e igual ao cardinal do conjunto dos naturais múltiplos de 3. (Indique funções que justifiquem estas afirmações. Determine outros subconjuntos de $\mathbb{N}$ que têm o mesmo cardinal que $\mathbb{N}$.)

2. Para mostrar que card($\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$) =card$\mathbb{N}$, podemos usar a *diagonalização de Cantor* (veja nos apontamentos da aula). Verifique que a diagonalização de Cantor define uma função bijectiva $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{N}$ tal que

   $$f((i,j) = \sum_{k=1}^{i+j-1} (k-1) \, + i \, ,$$

   ou seja,

   $$f(i,j) = \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} \, + i \, .$$

3. card$\mathbb{Q}$ =card$\mathbb{N}$

4. card$\mathbb{R}$ >card$\mathbb{N}$.

Um conjunto infinito A diz-se *numerável* se card$A$ =card$\mathbb{N}$.

Portanto, exemplos de conjuntos numeráveis são $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, etc. O conjunto $\mathbb{R}$ é um exemplo de conjunto não numerável.

5.1 Exercícios

1. Quais das seguintes relações são funções e quais são funções parciais de $X = \{1,2,3\}$ para $Y = \{1,2,3,4\}$? Em cada caso, indique o domínio e o contradomínio da relação.

   $f_1 = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$

   $f_2 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

   $f_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

   $f_4 = \{(1,2)\}$

2. Verifique se os conjuntos seguintes definem funções (considerando um conveniente conjunto de partida). Em caso afirmativo, indique o domínio e o contradomínio.

   (a) $\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(3,(1,4)),(4,(2,4))\}$ (b) $\{(1,(2,3)),(2,(3,4)),(1,(2,4))\}$

   (c) $\{((1,2),3),((2,3),4),((3,3),2)\}$ (d) $\{(1,(2,3)),(2,(2,3)),(3,(2,3))\}$

3. Mostre que, fazendo corresponder a cada A de $\mathbb{P}(D)$, onde D é um conjunto, o seu complementar A^c, obtemos uma função.

4. Será a relação "é subconjunto de"entre os subconjuntos de um dado conjunto uma função?

5. Considere as funções f, g e h dadas por $f = \{(1,c),(2,a),(3,b),(4,c)\}$, $g = \{(a,2),(b,1),(c,4)\}$ e $h = \{(1,A),(2,B),(3,D),(4,D)\}$. Determine $g \cdot f$, $h \cdot (g \cdot f)$, $h \cdot g$ e $(h \cdot g) \cdot f$. Determine também $f \cdot g$.

6. Sejam as funções de variável real $f(x) = 3x^2 + y$, $g(x) = \frac{x}{y}$ e $h(x) = (x+y)^2$. Determine $f \cdot g$, $g \cdot f$, $f \cdot h$ e $f \cdot g \cdot h$.

7. Determine quais das seguintes funções são injectivas, quais são sobrejectivas e quais são bijectivas.

   (a) $f : \{1,2,3\} \longrightarrow \{a,b,c\} \qquad f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

   (b) $g : \{1,2,3\} \longrightarrow \{a,b,c,d\} \qquad g = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

   (c) $h : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} \qquad h = \{(1,2),(2,1),(3,2)\}$

   (d) $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad p(j) = j^2 + 2$

   (e) $m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad m(j) = j(\text{mod}3)$

   (f) $q : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad q(j) = \begin{cases} 1 & \text{se } j \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } j \text{ é par} \end{cases}$

   (g) $r : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\} \qquad r(j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } j \text{ é par} \end{cases}$

8. Sendo $(0...p) = \{0,1,2,...,p\}$, quais das seguintes funções são injectivas, sobrejectivas ou bijectivas?

   (a) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad f(j) = \begin{cases} j/2 & \text{se } j \text{ par} \\ (j-1)/2 & \text{se } j \text{ ímpar} \end{cases}$

   (b) $f : (0...6) \longrightarrow (0...6) \qquad f(x) = (3x)(\text{mod}7)$

   (c) $f : (0...3) \longrightarrow (0...3) \qquad f(x) = (3x)(\text{mod}4)$

9. Demonstre que se f e g são funções injectivas então $f \cdot g$, supondo que está definida, também é injectiva.

10. Indique todas as funções possíveis de $X = \{a, b\}$ para $Y = \{0, 1\}$ e diga quais são injectivas, sobrejectivas ou bijectivas.

11. Se X e Y são conjuntos finitos, determine uma condição necessária para a existência de uma função injectiva de X para Y.

12. Prove que se A é um conjunto finito toda a função de A para A que é injectiva também é sobrejectiva e vice-versa. Mostre que o mesmo não acontece para conjuntos infinitos.

13. Mostre que as funções f e g, ambas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$ dadas por $f(x, y) = x + y$ e $g(x, y) = xy$ são sobrejectivas mas não injectivas.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 2$. Determine f^{-1}.

15. Indique uma função injectiva de $A \times B$ para $B \times A$, sendo A e B conjuntos quaisquer. Essa função é sobrejectiva?

16. Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Defina uma função $f : X \to X$ tal que $f \neq I_X$ e f injectiva. Determine f^2, f^3, f^{-1} e $f \cdot f^{-1}$.

17. Determine uma função injectiva $g : X \to X$ tal que $g \neq I_X$ mas $g \cdot g = I_X$.

18. Determine $[5/2]$, $[(5/2)^2]$, $[5/2]^2$, $4 - [5/2]$ e $4 + [-5/2]$.

19. Para $n = 1, 2, ..., 10$, indique o valor de $n\text{mod}3$ e $(-n)\text{mod}3$.

20. Seja $y = x(x+1)$, $x \in \mathbb{N}$. Defina $h(y)$ como sendo z se $z(z+1) \leq y < (z+1)(z+2)$. Expresse $h(y)$ usando a função característica. Defina a função resto associada com este $h(y)$.

21. Prove que:

    (a) $x^2 - [x]^2 < 2[x] + 1$, para todo o real $x \geq 0$;

    (b) $x^2 - [x]^2 > 2[x] + 1$, para todo o real $x < 0$.

22. Dado $D = \{1, 2, 3\}$

    (a) Enumere D^3 usando a ordem lexicográfica.

    (b) Enumere D^2 usando a diagonalização de Cantor.

23. Prove que o conjunto dos números racionais é numerável.

6 Exercícios

1. Tomando $\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ para conjunto universal, $A=\{-2,2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ e $C=\{x \mid x \geq 0 \wedge x^2 < 9\}$,

   (a) determine o cardinal de C;

   (b) determine (em extensão) os conjuntos $A \cap C$, $A - B$, B^c, $A \cup B^c$, $B \times C$ e 2^A.

2. Em cada uma das alíneas seguintes diga se a igualdade apresentada é ou não válida para todos os conjuntos A e B. No caso afirmativo deduza a igualdade e no caso negativo exiba um contra-exemplo.

   (a) $(A \cup B) \cap A^c = B \cap A^c$ (b) $(A \cup B) \cap A^c = B \cup (A \cap B^c)$

3. Em cada um dos três casos, (A), (B) e (C), descreve-se uma relação R definida num certo conjunto:

   (A) xRy sse $x \bmod 2 = y \bmod 2$, no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros;
   (B) XRY sse $X \subseteq Y$, no conjunto das partes de $\{0, 1\}$;
   (C) XRY sse $X \cap Y \neq \emptyset$, no conjunto $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

   (a) Faça corresponder a cada um dos casos (A), (B) e (C), a situação que, de entre (i), (ii) e (iii), a seguir, lhe diz respeito, justificando sucintamente:

      (i) R é uma relação de ordem parcial;
      (ii) R é uma relação de equivalência;
      (iii) R não é relação de ordem parcial nem relação de equivalência.

   (b) Para o caso em que R é uma relação de equivalência, indique as respectivas classes de equivalência.

   (c) Para o caso em que a relação não é relação de ordem parcial nem relação de equivalência, escreva (em extensão) o conjunto dos pares de R, e indique o seu fecho reflexivo.

4. (a) Diga quando é que uma relação é uma função e quando é função parcial.

   (b) para cada uma das relações S seguintes, definidas de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$, diga se é função, apenas função parcial ou nem uma coisa nem outra. Justifique sucintamente no caso de não ser função.

   i. $(x,y) \in S$ sse $x + y > 0$; ii. $(x,y) \in S$ sse $y = x^2$; iii. $(x,y) \in S$ sse $y = \dfrac{1}{x}$

5. Averigue se a seguinte igualdade entre conjuntos é verdadeira ou falsa, provando-a ou apresentando um contra-exemplo.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

6. Dado o conjunto $A = \{a, \{a\}\}$, determine

   (a) $A \cap \{a\}$;

   (b) o conjunto $A - \{\{a\}\}$;

   (c) o conjunto potência de A;

   (d) o conjunto $A \times A$.

7. Considere as relações R e S definidas no conjunto dos números inteiros tais que xRy significa que $x \leq y$ e xSy significa que $x = 2y$.

   (a) Diga, justificando convenientemente, se S é reflexiva, irreflexiva, simétrica, anti-simétrica ou transitiva.

   (b) Indique o significado de $xR \cdot Sy$. Averigue se $(1001, 2222)$ pertence a $R \cdot S$.

   (c) Considere agora as relações R e S definidas no conjunto $A = \{1, 2, 4\}$. Determine sob a forma de subconjunto de $A \times A$:
   (i) R (ii) S (iii) $R \cdot S$ (iv) $R \cdot S^{-1}$

8. (a) Quando é que uma relação é uma função?

   (b) O estudante A tenta definir uma função $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ usando a regra $g(\frac{m}{n}) = (m, n)$ para todos os inteiros m e n com $n \neq 0$. O estudante B afirma que g está mal definida, ou seja, g não é função. Mostre que quem tem razão é o estudante B.

9. Dados o conjunto $A = \{\, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\} \,\}$ (onde $\emptyset$ designa o conjunto vazio),

   (a) indique os cardinais de A, A^3 e 2^A;

   (b) determine

   (i) $A - \{\{\emptyset\}\}$, (ii) $\{x, y\} \times (A - \{\{\emptyset\}\})$, (iii) $A \cap \emptyset$, (iv) $A \cap \{\{\emptyset\}\}$.

10. (a) Mostre que para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \cup B = A \cup C$ então $B - A = C - A$.

    (b) Arranje conjuntos A, B e C tais que $A \cup B = A \cup C$ mas $B \neq C$.

11. Considere no universo dos humanos as relações F, B e N definidas por

    xFy sse x é filho(a) de y

    xBy sse x é irmã(o) de y

    xNy sse x é neto(a) de y

    (a) Determine qual é a relação de parentesco dada por $F \cdot B$.

    (b) Expresse a relação N em função de F.

12. A relação R definida no conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$ é, relativamente à ordenação alfabética dos seus elementos, representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    (a) Escreva R sob a forma de conjunto de pares ordenados.

    (b) Diga, justificando, se R é uma relação de ordem parcial (fraca) e, em caso afirmativo, desenhe o seu diagrama de Hasse.

    (c) Determine a matriz da relação $R \cdot R$.

13. (a) Quando é que uma relação é uma função?

    (b) Quando é que uma função se diz injectiva?

    (c) Averigue se a função $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = (2x) \bmod 6$ é ou não injectiva.