Capítulo II

Cálculo de Predicados[1]

1 Predicados e quantificadores

Consideremos as afirmações seguintes:

$$x \text{ é } par. \tag{1.1}$$

$$x \text{ é } tão\ alto\ como\ y. \tag{1.2}$$

$$x + y = 0. \tag{1.3}$$

$$x \text{ é } pai\ de\ y. \tag{1.4}$$

Denotemos a afirmação (1.1) por $p(x)$. Claro que não faz sentido dizer se $p(x)$ é verdadeira ou falsa. Mas se substituirmos o x por um número natural, já o podemos fazer. Assim $p(2)$ é verdadeira e $p(3)$ é falsa. Analogamente, denotando a afirmação (1.3) por $q(x, y)$, podemos afirmar que $q(1, 2)$ é falsa e $q(-2, 2)$ verdadeira. Também as afirmações (1.2) e (1.4) podem ser tratadas de forma similar atribuindo às variáveis valores num determinado universo de pessoas.

Em geral, uma afirmação envolvendo as variáveis x_1, x_2, ..., x_n pode ser denotada por $p(x_1, x_2, ..., x_n)$; p diz-se um predicado de *aridade* n ou um predicado n-*ário*. Em particular, se $n = 1$, p diz-se unário, se $n = 2$, diz-se binário.

Atentemos agora nas afirmações:

$$Todo\ o\ x \text{ é } par. \tag{1.5}$$

$$Algum\ x \text{ é } português. \tag{1.6}$$

$$Existe\ um\ x\ tal\ que\ x + x = 0. \tag{1.7}$$

Para expressar estas afirmações podemos usar, para além dos símbolos de predicado, os quantificadores universal e existencial. Usamos $\forall x$ para significar "para todo o x", "todo

[1]Para uma boa compreensão dos assuntos aqui tratados é necessária a participação nas aulas teóricas.

o x", "para qualquer x, etc. Escrevemos $\exists x$ para expressar de "existe um x", "existe algum x", "existe pelo menos um x", "para algum x", etc. Assim, usando os símbolos de predicado p e q com o significado descrito atrás, podemos representar (1.5) por

$$\forall x\, p(x) \tag{1.8}$$

e (1.7) traduz-se por

$$\exists x\, q(x, x) \tag{1.9}$$

Quanto a (1.6), se representarmos "x é português"por $t(x)$, obtemos

$$\exists x\, t(x) \tag{1.10}$$

Podemos combinar o já aprendido no cálculo proposicional com estes dois novos ingredientes, os predicados e os quantificadores. Por exemplo, sejam as expressões

$$s \rightarrow \exists x\, p(x) \tag{1.11}$$

$$p(j) \wedge p(r) \rightarrow p(t) \tag{1.12}$$

e tomemos para universo do discurso um certo grupo de pessoas; seja s a proposição "Faz sol", atribuamos a $p(x)$ o significado de "x vai à praia"e sejam j, r e t três pessoas desse grupo, respectivamente, Joana, Rui e Tiago. Deste modo, obtemos para (1.11) a interpretação

"Se faz sol então alguém vai à praia."

e para (1.12) a interpretação

"Se a Joana e o Rui vão à praia então o Tiago também vai à praia."

Exercícios da Secção 1

1. Expresse as seguintes afirmações na forma de cálculo de predicados. O domínio considerado é o conjunto dos números inteiros.

   (a) Se x está entre 1 e 2, e se y está entre 2 e 3, então a diferença entre x e y não pode exceder 2. Use o predicado $b(x, y, z)$ se x está entre y e z, e use $d(x, y, z)$ se a diferença entre x e y é maior do que z.

   (b) Se x é divisível por quatro então x não pode ser primo. Use $d(x, y)$ se x é divisível por y e $p(x)$ se x é primo.

   (c) $x + y = z$ e $x + z = u$. Use $s(x, y, z)$ se $x + y = z$.

2. Suponha que o universo de discurso é um grupo de pessoas. Traduza a afirmação "Toda a gente aqui fala inglês ou francês."em cálculo de predicados.

3. Expresse "Nenhum número natural é negativo."supondo que o universo do discurso é

   (a) o conjunto dos números naturais;

   (b) o conjunto dos números inteiros;

   (c) o conjunto dos números reais.

4. No domínio de todos os animais como traduziria as seguintes expressões em cálculo de predicados?

   (a) Todos os leões são predadores.
   (b) Alguns leões vivem em África.
   (c) Só os leões rugem.
   (d) Alguns animais comem insectos.
   (e) As aranhas comem insectos.
   (f) As aranhas só comem insectos.

5. No domínio dos números naturais escreva simbolicamente as seguintes expressões usando $p(x)$ para "x é primo"e $q(x)$ para "x é par". Pode usar também $x < y$ para cada x e y.

   (a) Alguns primos são pares.

   (b) Todos os números pares são maiores do que 1.

   (c) Um número par é primo se e só se for menor que 3.

   (d) Não existem números primos menores que 3.

2 Fórmulas bem formadas

Expressões como as (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) e (1.12) são exemplos de fórmulas bem formadas do cálculo de predicados, que vamos definir a seguir.

Símbolos do Cálculo de Predicados:

Variáveis: x, y, z, ...
Constantes: a, b, c, ...
Símbolos de predicado: p, q, r, ...
Conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
Quantificadores: $\forall$, $\exists$

Auxiliares: ( )

Chama-se *termo* a toda a variável ou constante.

Um *predicado atómico* é toda a expressão do tipo $p(t_1, t_2, ..., t_n)$ onde p é um símbolo de predicado de aridade n e $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos; **V**, **F** e todo símbolo proposicional são também predicados atómicos.

Fórmulas bem formadas (fbf)

- Todo o predicado atómico é uma fórmula bem formada;
- Se A e B são fbf's e x é uma variável, então as expressões seguintes são fórmulas bem formadas:

  (A), $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$, $\exists x\, A$ e $\forall x\, A$

Prioridade dos conectivos e quantificadores:

$$\neg,\ \exists x,\ \forall y$$

$$\wedge$$

$$\vee$$

$$\rightarrow$$

Escopo de um quantificador:

Na fbf $\exists x\, A$, A diz-se o escopo do quantificador $\exists x$.
Na fbf $\forall x\, A$, A é o escopo do quantificador $\forall x$.

Exemplo: O escopo de $\exists x$ na fbf

$$\exists x\, p(x, y) \rightarrow q(x) \tag{2.1}$$

é $p(x, y)$. O escopo de $\exists x$ na fbf

$$\exists x\, (p(x, y) \rightarrow q(x)) \tag{2.2}$$

é $p(x, y) \rightarrow q(x)$.

A ocorrência de uma variável x numa fbf diz-se *limitada* se ela figurar num quantificador ou estiver no escopo de $\exists x$ ou de $\forall x$. Caso contrário, diz-se *livre* ou *muda*. Por exemplo, as duas primeiras ocorrências de x em (2.1) são limitadas, a última ocorrência de x é livre e a única ocorrência de y é livre. Em (2.2), todas as ocorrências de x são limitadas.

Exercícios da Secção 2

1. Determine as variáveis livres e as limitadas em $(\forall x \exists y p(x, y, z) \wedge q(y, z)) \wedge r(x)$.

2. Escreva uma fbf do cálculo de predicados que contenha um quantificador existencial, um quantificador universal, dois símbolos de predicado, A e B, o primeiro de aridade 2, segundo de aridade 1, a ocorrência da variável x duas vezes, ambas limitadas, a ocorrência da variável y três vezes, duas limitadas e uma livre.

3 Semântica

Interpretações

Na primeira secção interpretámos algumas fbf's do cálculo de predicados. Vamos precisar o significado de interpretação de uma fbf.

Uma *interpretação* para uma fbf consiste em:

- Um conjunto não vazio D, chamado *domínio* ou *universo* da interpretação, juntamente com uma correspondência que associa os símbolos da fbf com elementos de D do seguinte modo:

- A cada símbolo de predicado corresponde uma determinada relação entre elementos de D. Um predicado sem argumentos é uma proposição e atribui-se-lhe um dos valores V ou F.

- A cada variável livre faz-se corresponder um elemento de D. A todas as ocorrências livres de uma mesma variável faz-se corresponder o mesmo elemento de D.

- A cada constante faz-se corresponder um elemento de D. A todas as ocorrências de uma mesma constante faz-se corresponder o mesmo elemento de D.

Exemplo Uma interpretação possível para a fbf

$$\exists x \, \forall y \, (q(x, y) \to q(z, y)) \tag{3.1}$$

é:

Universo: alunos de uma dada escola;

$q(x, y) :=$ "y é amigo x."
$z := c$, onde c representa uma determinada pessoa chamada Carlos.

Deste modo, o significado de (3.1) é: "Existe um aluno x tal que todo o amigo de x é também amigo de Carlos."

Uma outra interpretação para a mesma fbf:

$$\begin{aligned} &\text{Universo: } \mathbb{R} \\ &q(x, y) := x \times y = 0 \\ &z := 2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Com a segunda interpretação obtemos uma proposição verdadeira. Na verdade, seja $x = 1$. Então, se $q(x, y)$ for verdadeira, temos $1 \times y = 0$, pelo que tem de ser $y = 0$ e, consequentemente, $2 \times y = 0$; ou seja, $q(2, y)$ é verdadeira. Portanto, a implicação $q(1, y) \to q(2, y)$ é verdadeira para todo o y. Havendo um x que torna a implicação $q(x, y) \to q(2, y)$ verdadeira, concluimos que $\exists x\, \forall y\, (q(x, y) \to q(z, y))$ é verdadeira para esta interpretação.

Seja A uma fbf, x uma variável e t um termo. Então

$$S_t^x A$$

representa a expressão obtida substituindo todas as ocorrências de x por t.

Uma fbf diz-se uma *variante de* $\forall x\, A$ se for da forma $\forall y\ S_y^x A$ onde y é uma variável. Analogamente, $\exists x\, A$ e $\exists y\, S_y^x A$ são *variantes* uma da outra.

Validade

Uma fbf do cálculo dos predicados diz-se:

válida ou uma *tautologia*,	se for verdadeira para todas as possíveis interpretações;
satisfazível,	se existirem interpretações para as quais ela é verdadeira;
contraditória ou uma *contradição*,	se for falsa para qualquer interpretação.

Se A é uma fbf válida, escrevemos $\models A$.

Se B é uma fbf, então toda a interpretação que torna B verdadeira diz-se *satisfazer* B. Toda a interpretação que satisfaz B diz-se *modelo de* B.

Exemplo A interpretação (3.2) é um modelo de (3.1). Fica como exercício arranjar uma interpretação de (3.1) que a torne falsa e concluir que, portanto, (3.1) não é uma tautologia.

Exercícios da Secção 3

1. Expresse sob a forma de predicados $S_3^x\, p(x,y)$, $S_y^x\, p(x,y)$, $S_y^x\,(p(x) \wedge \forall x q(x))$ e $S_2^y\,(p(x) \wedge q(y) \wedge r(x,y))$.

2. Um universo contém três indivíduos a, b e c. Para estes indivíduos, define-se um predicado $q(x,y)$, cujos valores lógicos são dados pelo quadro seguinte:

	a	b	c
a	V	F	V
b	F	V	V
c	F	V	V

Estude a veracidade de:

(i) $\forall x \exists y\, q(x,y)$ (ii) $\forall y\, q(y,b)$ (iii) $\forall y\, q(y,y)$ (iv) $\exists x\, \neg q(a,x)$

(v) $\forall y\, q(b,y)$ (vi) $\forall y\, q(y,y) \wedge \forall x \exists y\, q(x,y)$.

3. Um universo de discurso consiste em três pessoas, nomeadamente, João, Maria e Joana. Os três são estudantes, e nenhum deles é rico. Os símblos de predicados s, m, f e r correspondem a ser estudante, ser homem, ser mulher e ser rico, respectivamente.

   (a) Para cada uma das expressões seguintes, diga se é verdadeira ou falsa: $\forall x\, e(x)$, $\forall x\, m(x) \vee \forall x\, h(x)$, $\forall x\,(m(x) \vee h(x))$, $\exists x\, r(x)$ e $\exists x\,(m(x) \to r(x))$.

   (b) Supondo p verdadeiro e q falso, determine $\forall x\, p$, $\forall x\, q$, $\exists x\,(p \wedge m(x))$, $\exists x\,(p \vee m(x))$ e $\exists x(q \vee m(x))$.

4. Será que a expressão $p(x) \to (p(x) \vee q(x))$ é válida? Justifique.

5. Numa certa interpretação o domínio consiste nos indivíduos a, b e c, e existe um predicado p de aridade 2 tal que $p(x,x)$ é verdadeiro para todos os possíveis valores de x, $p(a,c)$ é verdadeiro e $p(x,y)$ é falso para todos os outros casos em que x é diferente de y. Determine o valor lógico de

   (a) $p(a,b) \wedge p(a,c)$ (b) $p(c,b) \vee p(a,c)$ (c) $p(b,b) \wedge p(c,c)$ (d) $p(c,a) \to p(c,c)$

6. Seja A a expressão $(p(x) \to q(y)) \wedge \neg q(y) \wedge p(y)$.

   (a) Determine um modelo para A.

   (b) Comente a seguinte afirmação: "A expressão $\forall x \forall y A$ é uma contradição."

7. Mostre que $(p(x) \to q(y)) \wedge (q(y) \to r(z)) \to (p(z) \to q(z))$ não é válida.

4 Fórmulas equivalentes

Duas fbf's A e B dizem-se *logicamente equivalentes* se $A \leftrightarrow B$ for válida. Neste caso, escrevemos

$$A \equiv B$$

Segue-se uma tabela com algumas equivalências básicas.

Equivalências básicas no cálculo de predicados:

1. $\forall x\, A \equiv A$ se x não for livre em A
2. $\exists x\, A \equiv A$ se x não for livre em A
3. $\forall x\, A \equiv \forall y\, S_y^x A$ se y não for livre em A
4. $\exists x\, A \equiv \exists y\, S_y^x A$ se y não for livre em A
5. $\forall x\, A \equiv S_t^x A \wedge \forall x\, A$ para todo o termo t
6. $\exists x\, A \equiv S_t^x A \vee \exists x\, A$ para todo o termo t
7. $\forall x\,(A \vee B) \equiv A \vee \forall x\, B$ se x não for livre em A
8. $\exists x\,(A \wedge B) \equiv A \wedge \exists x\, B$ se x não for livre em A
9. $\forall x\,(A \wedge B) \equiv \forall x\, A \wedge \forall x\, B$
10. $\exists x\,(A \vee B) \equiv \exists x\, A \vee \exists x\, B$
11. $\forall x \forall y\, A \equiv \forall y \forall x\, A$
12. $\exists x \exists y\, A \equiv \exists y \exists x\, A$
13. $\neg \exists x\, A \equiv \forall x\, \neg A$
14. $\neg \forall x\, A \equiv \exists x\, \neg A$

Vamos provar e comentar algumas das equivalências. A prova das restantes fica como exercício.

1. Queremos mostrar que $\forall x\, A \equiv A$ é uma tautologia. Como x não é livre em A, seja qual for a interpretação que considerarmos, a veracidade de A é independente do x que figura no quantificador $\forall x$. Logo A é verdadeira se e só se $\forall x\, A$ o for, ou seja, $\forall x\, A$ e A vão ter sempre o mesmo valor lógico.

Exemplos de aplicação da propriedade 1: $\forall x\, \exists y\, p(y) \equiv \exists y\, p(y)\,,\ \ \forall x\, q(y,z) \equiv q(y,z)$.

Mas é claro que $\forall x\, \exists y\, r(x,y) \not\equiv \exists y\, r(x,y)$. (Porquê?)

5. Dado um determinado universo, $\forall x\, A$ é verdadeira se e só se A é verdadeira para toda a concretização de x nesse universo. Então, em particular, A é verdadeira para $x := t$. Como a conjunção de duas proposições verdadeiras é verdadeira, conclui-se que $S_t^x A \wedge \forall x\, A$ é verdadeira. Reciprocamente, se $S_t^x A \wedge \forall x\, A$ é verdadeira então, por definição da conjunção, $\forall x\, A$ tem de ser verdadeira.

Exemplo: $\forall x \exists y\, s(x,y) \equiv \exists y\, s(z,y)\ \wedge\ \forall x \exists y\, s(x,y)$.

8. Se existe um elemento x do universo tal que $A \wedge B$ é verdadeira para esse x então A e B são verdadeiras para esse x. Mas, como x não é livre em A, a veracidade de A não depende de x, logo $A \wedge \exists x\, B$ é também verdadeira. Reciprocamente, se $A \wedge \exists x\, B$ é verdadeira, temos que A é verdadeira independentemente de x e B é verdadeira para um certo x, logo $A \wedge B$ é verdadeira para esse x e, portanto, verifica-se que $\exists x\,(A \wedge B)$.

Exemplo: $\exists x\,(p(z) \wedge q(x)) \equiv p(z) \wedge \exists x\, q(x)$.

Mas $\exists x\,(p(x) \wedge q(x)) \not\equiv p(x) \wedge \exists x\, q(x)$.

As propriedades 13 e 14 são as *Leis de De Morgan* para os quantificadores. A sua prova fica também como exercício. Notemos entretanto que, quando nos situamos num universo finito $U = \{a_1,\, a_2,\, ...,\, a_n\}$, temos que:

- A fbf $\forall x\, p(x)$ representa uma conjunção de proposições, pois se tem

$$\forall x\, p(x) \equiv p(a_1) \wedge p(a_a) \wedge ... \wedge p(a_n)\,.$$

- A fbf $\exists x\, p(x)$ representa uma disjunção de proposições, verificando-se

$$\exists x\, p(x) \equiv p(a_1) \vee p(a_a) \vee ... \vee p(a_n)\,.$$

Aplicando as Leis de De Morgan (generalizadas) a cada um dos casos temos:

$$\neg\, \forall x\, p(x) \equiv \neg(p(a_1) \wedge p(a_a) \wedge ... \wedge p(a_n)) \equiv \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee ... \vee \neg p(a_n) \equiv \exists x\, \neg p(x)$$

$$\neg\, \exists x\, p(x) \equiv \neg(p(a_1) \vee p(a_2) \vee ... \vee p(a_n)) \equiv \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge ... \wedge \neg p(a_n) \equiv \forall x\, \neg p(x)$$

Exercícios da Secção 4

1. Use as equivalências lógicas básicas estudadas na aula teórica e as leis de comutatividade do cálculo proposicional para provar as equivalências lógicas seguintes. Suponha que x não ocorre livremente em A.

   (a) $(\exists x\, B) \wedge A \equiv \exists x(B \wedge A)$

   (b) $(\forall x\, B) \wedge A \equiv \forall x(B \wedge A)$

2. Em cada um dos casos seguintes, mova todos os quantificadores para o início da expressão de forma a obter uma expressão logicamente equivalente.

   (a) $\forall x\, p(x) \vee \forall x(q(x) \rightarrow p(x))$

   (b) $\exists x\, p(x) \wedge \exists x(q(x) \wedge p(x))$.

3. Suponha que $f(x)$ representa "x encontra um erro"e que q representa "o erro do programa pode ser corrigido". Traduza

$$\forall x(f(x) \rightarrow q).$$

4. Suponha que P representa a expressão $\exists y\, r(y)$. Use as regras básicas sobre equivalências lógicas estudadas na aula teórica para mostrar que

$$\exists x(P \vee q(x)) \equiv \exists x \exists y(q(x) \vee r(y)).$$

5 Argumentos correctos

Consideremos os seguintes argumentos:

1. Todos os gatos têm garras.
2. Tom é um gato.

---

3. Tom tem garras.

1. $\forall x\,(g(x) \to r(x))$
2. $g(t)$

---

3. $r(t)$

---

1. Toda a gente fala francês ou inglês.
2. A Joana não fala inglês.

---

3. A Joana fala francês.

1. $\forall x\,(i(x) \vee f(x))$
2. $\neg i(j)$

---

3. $f(j)$

Ambos os argumentos estão correctos. Analisemos por exemplo o primeiro: Se $\forall x\,(g(x) \to r(x))$ se verifica então $g(x) \to r(x)$ verifica-se para todo o x, em particular $g(t) \to r(t)$ é verdadeira. Como $g(t)$ se verifica, usando Modus Ponens concluimos $r(t)$.

Tal como no cálculo proposicional, no cálculo de predicados também escrevemos

$$A_1,\ A_2,\ \ldots A_n\ \models\ B$$

para afirmar que o argumento " De A_1, A_2, ..., A_n deduz-se B"é correcto, ou seja, que $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ é válida.

Exercícios da Secção 5

1. Averigue se cada um dos argumentos seguintes é ou não correcto:

   (a) $\forall x\, p(x),\ \forall x\, q(x)\ \models\ \forall x\,(p(x) \wedge q(x))$

   (b) $\exists x\, p(x)\ \models \forall x\, p(x)$

(c) $\exists x\, p(x),\ \forall x\, (p(x) \to q(x)) \models \forall x\, q(x)$

2. Formalize os seguintes argumentos e diga se são ou não correctos.

   (a) Há aqui alguém que fala inglês e francês. Logo há aqui alguém que fala inglês e há aqui alguém que fala francês.

   (b) Todas as pessoas aqui presentes falam francês ou inglês. Logo todas as pessoas aqui presentes falam francês ou todas falam inglês.

6 Sistema formal para o Cálculo de Predicados

O sistema formal que vamos considerar para o cálculo dos predicados é constituído por:

1. Símbolos:

   $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \to, \leftrightarrow,\ \forall,\ \exists$

   parêntesis (e)

   variáveis x, y, z, ...

   constantes

   símbolos de predicado

2. Fórmulas bem formadas: como definido atrás.

3. Regras de inferência

   - Todas as da Tabela RI
   - Regras de inferência para o quantificador universal
   - Regras de inferência para o quantificador existencial

4. Teorema da Dedução

O sistema formal acabado de descrever é completo e correcto, ou seja, verifica-se $A_1, A_2, ..., A_n \models B$ se e só quando se verificar $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$. Dito doutro modo, $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \to B$ é uma tautologia se e só se, dentro deste sistema formal, das premissas $A_1, A_2, ..., A_n$ se deduz B.

Como mencionado, este sistema tem novas regras de inferência que respeitam aos quantificadores. Vamos descrevê-las a seguir.

Regras de inferência para os quantificadores universal e existencial

Eliminação universal (EU)

A *eliminação do quantificador universal*, abreviadamente *Eliminação Universal*, é uma regra de inferência que estabelece que da premissa $\forall x\, A(x)$ se deduz que $A(t)$ é verdadeira para todo o elemento t do universo de discurso. Abreviadamente:

$$\frac{\forall x\, A}{S_t^x A}$$

Por exemplo, de $\forall x\, p(x, y)$ deduz-se $p(z, y)$, onde z representa um qualquer elemento do universo. Também por EU, se infere $p(x, y)$ de $\forall x\, p(x, y)$. Outro exemplo: De $\forall x\, \exists y\, q(x, y)$ deduz-se $\exists y\, q(x, y)$; mas atenção, de $\forall x\, \exists y\, q(x, y)$ não se pode inferir $\exists y\, q(y, y)$: é claro que o x que torna $q(x, y)$ verdadeira não tem de ser o próprio y.

Temos pois de respeitar algumas normas quando usamos a Eliminação Universal, nomeadamente:

De uma fbf da forma $\forall x\, A$, podemos inferir uma fbf aplicando S_t^x a A, se t for livre para substituir x em A, i.e., se não existirem ocorrências x em A no escopo de algum quantificador que limite t.

Por exemplo:
A variável x é sempre livre para substituir x em $A(x)$.
Toda a constante é sempre livre para substiuir x em $A(x)$.
Se y não ocorre em $A(x)$, y é livre para substiuir x em $A(x)$.

Exemplos:

1. Demonstração formal de $\forall x(h(x) \rightarrow m(x)), h(s) \vdash m(s)$:

1. $\forall x(h(x) \rightarrow m(x))$	premissa
2. $h(s)$	premissa
3. $h(s) \rightarrow m(s)$	1. e EU (S_s^x)
4. $m(s)$	2., 3. e MP

Uma interpretação:

1. Todos os humanos são mortais.
2. Sócrates é um humano.
3. Sócrates é mortal.

2. Demonstração formal de

   $\forall x(f(d,x) \to s(x,d) \vee r(x,d)),\ f(d,p),\ \neg r(p,d) \vdash s(p,d)$:

1. $\forall x(f(d,x) \to s(x,d) \vee r(x,d))$	premissa
2. $f(d,p)$	premissa
3. $\neg r(p,d)$	premissa
4. $f(d,p) \to s(p,d) \vee r(p,d)$	1. e EU(S_p^x)
5. $s(p,d) \vee r(p,d)$	2., 4., e MP
6. $s(p,d)$	3., 5. e SD

(Exercício: Arranje uma interpretação para este caso.)

Eliminação existencial (EE)

A *eliminação do quantificador existencial*, abreviadamente *Eliminação Existencial*, é uma regra de inferência que estabelece que da premissa $\exists x\, A(x)$ se deduz $A(b)$, onde b é uma nova constante na prova. Abreviadamente:

$$\frac{\exists x\, A}{S_b^x A}$$

Exemplo: Vamos demonstrar que

$$\forall x \neg p(x) \vdash \neg \exists x p(x)\,.$$

Na demonstração vamos usar *prova por contradição* que, como vimos atrás, consiste em assumir as premissas juntamente com a negação da tese chegando assim a uma contradição.

1. $\exists x\, p(x)$	hipótese (por contradição)
2. $p(b)$	1. e EE
3. $\forall x\, \neg p(x)$	premissa
4. $\neg p(b)$	3. e EU
5. $p(b) \wedge \neg p(b)$	2., 4. e LC
6. F	5. (porque $A \wedge \neg A \vdash F$)

Conclui-se $\forall x \neg p(x) \vdash \neg \exists x p(x)$, de 1., 3. e 6., por contradição.

Introdução universal (IU)

A *introdução do quantificador universal*, abreviadamente *Introção Universal*, é uma regra de inferência que estabelece que da premissa de que $A(t)$ é verificada para todo o membro do universo do discurso se deduz $\forall x\, A(x)$. Abreviadamente:

$$\frac{S_t^x A}{\forall x\, A}$$

Esta regra de inferência só pode ser usada com limitações adequadas, nomeadamente:

De A deduz-se $\forall x\, A$ se x não é *variável pendente* nem *variável subescrita* em A.

Antes de nos debruçarmos sobre os conceitos de variável pendente ou subescrita, seguem-se dois exemplos de demonstração formal onde é usada Introdução Universal. Note-se que em todos os casos esta regra de inferência foi aplicada nas condições seguintes: tem-se uma fbf A onde figura uma certa variável w que representa qualquer membro do universo de discurso e aplica-se o quantificador universal afectado por uma variável z a $S_z^w A$.

Exemplos:

1. Demonstração formal de $\forall x\, P(x)$, $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$:

1. $\forall x P(x)$	premissa
2. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)$	premissa
3. $P(x)$	1., e EU(S_x^x)
4. $P(x) \rightarrow Q(x)$	2. e EU(S_x^x)
5. $Q(x)$	3., 4. e MP
6. $\forall x Q(x)$	5. e IU

2. Demonstração formal de $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \forall x P(x, y)$:

1. $\forall x \forall y P(x, y)$	premissa
2. $\forall y P(x, y)$	1. e EU(S_x^x)
3. $P(x, y)$	2. e EU(S_y^y)
4. $\forall x P(x, y)$	3. e IU
5. $\forall y \forall x P(x, y)$	4. e IU

De forma a compreender as restrições que se impõem na aplicação da Introdução Universal, e que justificam as definições de variável pendente e variável subescrita, consideremos alguns exemplos:

1) É claro que da premissa $p(x)$ não podemos deduzir $\forall x\, p(x)$. Na verdade é fácil arranjar uma interpretação que torne $p(x)$ verdadeira e $\forall x\, p(x)$ falsa. Basta considerar

$\mathbb{N}$ como universo, $p(x) :=$ *x é um primo diferente de dois.* e atribuir à variável livre x o valor 3; então $p(3)$ é verdadeira mas $\forall x\, p(x)$ é falsa.

2) Suponhamos que temos a seguinte sequência de fbf's:

1. $p(x)$	premissa
2. $\forall x\,(p(x) \to q(x))$	premissa
3. $p(x) \to q(x)$	2. e EU
4. $q(x)$	1., 3. e MP

Se aplicássemos a seguir o quantificador universal, acrescentando uma quinta linha

5. $\forall x\, q(x)$

a prova formal ficaria incorrecta. Na verdade, adoptando a interpretação usada em 1) juntamente com $q(x) :=$ *x é ímpar.*, vem que as premissas $p(x)$ e $\forall x\,(p(x) \to q(x))$ são verdadeiras mas $\forall x\, q(x)$ é obviamente falsa. (Justifique.)

Mais uma vez o problema decorreu do facto de x ser uma variável livre numa premissa, premissa essa que se usa em 3.

3) Seja a sequência de fbf's

1. $\exists x\, p(x)$	premissa
3. $p(x)$	1. e EE

É evidente que de 3. não podemos deduzir $\forall x\, p(x)$, pois é fácil arranjar um exemplo de interpretação que torne $\exists x\, p(x)$ verdadeira e $\forall x\, p(x)$ falsa.

4) Um outro exemplo envolvendo EE:

1. $\forall x\, \forall y\, p(x,y)$	premissa
2. $\forall x\, \exists y\, ((p(x,y) \to q(x,y))$	premissa
3. $\forall y\, p(x,y)$	1. e EU
4. $p(x,y)$	3. e EU
5. $\exists y\, ((p(x,y) \to q(x,y))$	2. e EU
6. $p(x,y) \to q(x,y)$	5. e EE
7. $q(x,y)$	4., 6. e MP

Neste caso também não podemos aplicar Introdução Universal à fbf de 7. Se o fizessemos estaríamos a inferir $\forall x\, q(x,y)$ das premissas $\forall x\, \forall y\, p(x,y)$ e $\forall x\, \exists y\, ((p(x,y) \to q(x,y))$. Mas isso é incorrecto como se pode ver através da seguinte interpretação:

universo: $\mathbb{N}$
$p(x,y) := x + y \geq 0$
$q(x,y) := x \leq y$

De acordo com este quadro, temos que:

– As premissas são verdadeiras. A premissa $\forall x \, \forall y \, p(x, y)$ é verdadeira, visto que significa que a soma de quaisquer dois números naturais é maior ou igual a zero. Quanto à veracidade da premissa $\forall x \, \exists y \, ((p(x, y) \rightarrow q(x, y))$: Para ela ser verdadeira tem de $\exists y \, ((p(x, y) \rightarrow q(x, y))$ ser verdadeira para todo o natural x; isto verifica-se pois, como $q(x, x)$ é verdadeira para todo o x, conclui-se que, escolhendo, para cada natural x, $y := x$, a implicação $p(x, y) \rightarrow q(x, y)$ fica verdadeira.

Mas

– $\forall x \, q(x, y)$, que significa que todo o natural x é menor ou igual que um determinado y, é obviamente falsa.

Nos exemplos anteriores aparecem variáveis pendentes e subescritas, de acordo com as definições que se seguem.

Uma *variável pendente* define-se recursivamente do seguinte modo:

• Uma variável x numa fbf A é uma *variável pendente em* A se x é livre em A e A é uma premissa.

• Uma variável x numa fbf A é uma *variável pendente em* A se A é inferida de uma fbf na qual x é uma variável pendente.

Um exemplo:

1. $p(x)$	premissa	x é pendente
2. $\forall x \, q(x)$	premissa	
3. $q(x)$	2. e EU	
4. $p(x) \wedge q(x)$	1., 3. e LC	x é pendente

Nos exemplos 1) e 2) tinhamos também uma variável pendente que impedia a aplicação de IU. (Verifique.)

Uma *variável subescrita* define-se recursivamente do seguinte modo:

• Uma variável x numa fbf A diz-se uma *variável subescrita em* A se x é livre em A e existe uma constante b em A que foi criada pela regra EE.

• Uma variável x numa fbf A é uma *variável subescrita em* A se A é inferida de uma fbf na qual x é uma variável subescrita.

Exemplo:

1. $\forall x \exists y \, p(x, y)$	premissa	
2. $\exists y \, p(x, y)$	1. e EU	
3. $p(x, c)$	2. e EE	x é subescrita
4. $p(x, c) \vee q(x, y)$	1., 3. e LA	x é subescrita

Nos exemplos 3) e 4) foi também a presença de uma variável subescrita que não permitiu o uso de Introdução Universal. (Verifique.)

Seguem-se mais dois exemplos de demonstrações formais onde se faz uso de IU.

Exemplos:

1. Teorema: $\forall x P(x) \vdash \forall y P(y)$

   Prova:

1. $\forall x P(x)$	premissa
2. $P(y)$	1. e EU(S_y^x)
3. $\forall y P(y)$	2. e IU

2. Um exemplo em que se usa o Teorema da Dedução:

   Teorema: $\forall x(s(x) \rightarrow p(x)) \vdash \forall x(\neg p(x) \rightarrow \neg s(x))$

   Prova:

1. $\forall x(s(x) \rightarrow p(x))$	premissa
2. $s(x) \rightarrow p(x)$	1. e EU(S_x^x)
3. $\neg p(x)$	hipótese
4. $\neg s(x)$	2., 3. e MT
5. $\neg p(x) \rightarrow \neg s(x)$	3., 4.9 e TD
6. $\forall x(\neg p(x) \rightarrow \neg s(x))$	5. e IU

Introdução existencial (IE)

A *introdução do quantificador existencial*, abreviadamente *Introção Existencial*, é uma regra de inferência que estabelece que da premissa de que $A(t)$ se verifica para algum membro t do universo de discurso se deduz $\exists x\, A(x)$. Abreviadamente:

$$\frac{S_t^x A}{\exists x\, A}$$

Mais precisamente:

De $S_t^x A$ infere-se $\exists x A$ se t for livre para substituir x em A, i.e., se não existirem ocorrências x em A no escopo de algum quantificador que limite t.

(Note-se que, por definição, assumimos que todo o universo é não vazio.)

Exercício: Dê um exemplo de aplicação indevida de Introdução Existencial, justificando com uma interpretação adequada.

Exemplo: Demonstração de $\forall x(w(x) \to r(x)),\, w(m) \vdash \exists x r(x)$:

1. $\forall x(w(x) \to r(x))$	premissa
2. $w(m) \to r(m)$	1. e EU (S_m^x)
3. $w(m)$	premissa
4. $r(m)$	2., 3. e MP
5. $\exists x r(x)$	4. e IE

Exercícios da Secção 6

1. Dados P e $\forall x(P \to Q(x))$, construa uma demonstração formal para $\forall x\, Q(x)$. Como regras de inferência, use eliminação universal, introdução universal e modus ponens.

2. Dados $\forall x \neg q(x)$ e $\forall x(p(x) \to q(x))$, dê uma demonstração formal de $\forall x \neg p(x)$. Use eliminação universal, introdução universal e modus tollens como regras de inferência.

3. Faça uma demonstração formal para mostrar que $\exists x \exists y\, a(x,y)$ implica logicamente $\exists y \exists x\, a(x,y)$. Use eliminação existencial e introdução existencial como regras de inferência.

4. Demonstre formalmente que $\forall x A(x)$ implica formalmente que $\exists x A(x)$.

5. Suponha que $f(x,y)$ denota o facto de x ser filho de y, e que $p(x,y)$ denota o facto de y ser um dos pais de x. Então é claro que

$$\forall x \forall y (f(x,y) \to p(x,y))$$

Faça uma demonstração formal para mostrar que se Pedro é filho de Joana, então Joana é um dos pais de Pedro.

6. Se $v(x,y)$ designa o facto de x e y viverem na mesma cidade, então temos que

$$\forall x \forall y \forall z (v(x,y) \wedge v(y,z) \to v(x,z))$$

Usando-o como uma das premissas, dê uma demonstração formal de que se Pedro vive na mesma cidade que Maria, e Maria vive na mesma cidade que Bruno, então Pedro vive na mesma cidade que Bruno.

7 Regras para a igualdade

As interpretações de um predicado binário $p(x, y)$ podem ser de vários tipos. Por exemplo,

$$p(x,y) := \text{“}x \text{ é filho de } y\text{”}$$
$$p(x,y) := x \geq y$$
$$p(x,y) := \text{“}x \text{ e } y \text{ pertencem à mesma espécie”}$$

Claro que cada uma destas interpretações só faz sentido num universo adequado. Assim a primeira pode dizer respeito a um grupo de pessoas, a segunda a um conjunto de números e a terceira a um grupo de animais. Mas a atribuição

$$p(x,y) := (x = y)$$

tem sentido em qualquer universo que se considere. Daí o ser comum usar o predicado binário da igualdade em fbf's do cálculo de predicados exactamente na forma $x = y$. Deste modo, por exemplo, a expressão

$$\forall x \, \exists y \, (x = y) \tag{7.1}$$

é uma fórmula bem formada. Outro exemplo de fbf contendo o predicado igualdade:

$$\exists y \, \forall x \, (x = y) \tag{7.2}$$

Exercício: Mostre que (7.1) é válida mas (7.2) o não é. Será (7.2) contraditória? Justifique.

A igualdade é um predicado com que lidamos amiúde no dia a dia matemático, e cujas características conhecemos bem. A seguir explicitam-se propriedades essenciais relativas à igualdade.

Introdução da igualdade
(Qualquer coisa é igual a si própria)

$$t = t$$

Lei da existência
(Os domínios interpretativos são sempre não vazios)

$$\vdash \exists x \, (x = x)$$

Eliminação da igualdade
(Coisas iguais têm as mesmas propriedades)

$$t_l = t_2, \, \phi(t_1) \vdash \phi(t_2)$$

Propriedades da igualdade

$\vdash \forall x(x = x)$	(reflexividade)	
$\vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$	(simetria)	$\dfrac{s = t}{t = s}$
$\vdash \forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$	(transitividade)	$\dfrac{r = s,\ s = t}{r = t}$

Igualdade e unicidade

Enquanto o quantificador $\exists$ significa "existe pelo menos um", o símbolo $\exists^1$ (ou $\exists!$) usa-se com o significado de " Existe um e um só". Portanto $\exists^1 x$ refere-se não só à existência de um x mas também à sua unicidade. Põe-se a questão: Como traduzir em cálculo de predicados (só com o uso dos quantificadores $\forall$ ou $\exists$) uma afirmação do tipo $\exists^1 x\, p(x)$? Dão-se a seguir duas formas de expressar $\exists^1 x\, p(x)$. Fica como exercício a verificação de que elas estão correctas.

$$\exists^1 x\, p(x) \equiv \exists x(p(x) \wedge \forall y(p(y) \rightarrow (y = x))$$

$$\exists^1 x p(x) \equiv \exists x p(x) \wedge \forall x \forall y(p(x) \wedge p(y) \rightarrow (x = y))$$

Exercícios da Secção 7

1. Use as regras de inferência da igualdade para mostrar que
$$(x = y) \wedge (y \leq z) \rightarrow (x \leq z).$$

2. Considere $e(x)$: x é um electricista, e seja j o representante de João. Expresse simbolicamente "João é o único electricista"com e sem o símbolo $\exists^1$.

3. Suponhamos que $f(x) = y$ se $x = y^2$ e consideremos a seguinte "demonstração formal"

   1. $1 = 1$ reflectividade da igualdade
   2. $1 = f(1)$ definição de f
   3. $-1 = f(1)$ definição de f
   4. $1 = -1$ transitividade da igualdade aplicada a 2. e 3.

   Determine o erro.

8 Exercícios

1. (a) Apresente uma interpretação para a qual a fórmula bem formada $p(t) \wedge \forall x q(x)$ seja verdadeira e $\forall x(p(x) \wedge q(x))$ seja falsa.

   (b) As duas fórmulas da alínea anterior serão logicamente equivalentes? Justifique.

   (c) Atendendo às alíneas anteriores, é evidente que não se pode deduzir $\forall x(p(x) \wedge q(x))$ de $p(t)$ e $\forall x q(x)$. Descubra então o(s) erro(s) da seguinte demonstração formal:

1. $\forall x q(x)$	premissa
2. $q(t)$	1 e EU
3. $p(t)$	premissa
4. $p(t) \wedge q(t)$	3, 2 e LC
5. $\forall x(p(x) \wedge q(x))$	4 e IU

   (d) Faça uma demonstração formal do teorema: $\forall t p(t), \forall x q(x) \vdash \forall x(p(x) \wedge q(x))$.

2. (a) Averigue se $p \wedge q$ e $\neg(p \rightarrow \neg q)$ são logicamente equivalentes.

   (b) Apresente uma interpretação que torne a fórmula bem formada $p(x) \wedge \exists y\, q(y) \rightarrow \forall x\, p(x)$ falsa.

   (c) Usando a alínea anterior que pode dizer sobre a afirmação "$p(x) \wedge \exists y\, q(y) \vdash \forall x\, p(x)$"?

3. Traduza logicamente as frases seguintes:

   (a) "Para quaisquer dois números reais x e y existe sempre um número real z tal que $x + z = y$."
   usando $d(x, y, z)$ com o significado de "$x + z = y$"e considerando que $\mathbb{R}$ é o universo.

   (b) "Todos os portugueses falam português mas nem todos falam francês."
   usando $n(x)$, $p(x)$ e $f(x)$ com o significado de, respectivamente, "x é português", "x fala português"e "x fala francês", e considerando como universo todas as pessoas.

4. Prove formalmente que das premissas $\exists x\, M(x)$, $\forall x\, (M(x) \rightarrow \exists y\, C(x, y))$ e $\forall x\, ((\exists y\, C(x, y)) \rightarrow F(x))$ se deduz que $\exists y\, F(y)$. Pode usar as regras de inferência da Tabela RI e as eliminações e introduções universais e existenciais.

5. (a) Diga quando é que uma fórmula bem formada de cálculo de predicados se diz válida.

(b) Para cada uma das fbf's seguintes, diga, justificando, se é ou não válida:

i. $\forall x\,(p(x) \rightarrow p(x) \wedge q(x))$

ii. $\forall x\,(p(x) \rightarrow p(x) \vee q(x))$

6. (a) Verifique se a fórmula bem formada $(\forall z \exists w\, p(z,w)) \;\rightarrow\; (\forall z\, p(z,c))$ é ou não uma tautologia (i.e., se é válida).

   (b) Considere a seguinte sequência de fbf's do cálculo de predicados:

1. $\forall z \exists w\, p(z,w)$	premissa
2. $\exists w\, p(z,w)$	1. e EU
3. $p(z,c)$	2. e EE
4. $\forall z\, p(z,c)$	3. e IU

   Tendo em conta a resposta à alínea (a), poderá esta sequência ser uma demonstração formal correcta de que $\forall z \exists w\, p(z,w) \;\vdash\; \forall z\, p(z,c)$? Se não, indique as incorrecções.

7. Seja $P(x)$ a afirmação "O estudante x fala japonês"e seja $Q(y)$ a afirmação "O curso y tem um estudante que fala japonês".

   (a) Considerando para universo de discurso o conjunto de todos os estudantes dos cursos de engenharia, traduza as frases seguintes em fórmulas bem formadas de cálculo de predicados.

   (a1) Há pelo menos um estudante que fala japonês.

   (a2) Nenhum estudante fala japonês.

   (b) Considerando para universo de discurso o conjunto de todos os cursos de engenharia, traduza as frases seguintes em fórmulas bem formadas de cálculo de predicados.

   (b1) Todo o curso tem algum estudante que fala japonês.

   (b2) Existe pelo menos um curso onde nenhum estudante fala japonês.

8. Considere a proposição e os predicados seguintes:

   c: "Chove." t: "É Outubro." b: "É Abril." $f(x)$: "x fica em casa."
   $p(x)$: "x vai à praia." $g(x,y)$: "x protege y." m(x,y): "x é mãe de y."

   Traduza logicamente as frases, considerando para universo do discurso todas as pessoas:

   (i) "Se chove então é Outubro ou Abril."

   (ii) "Se chove a Ana fica em casa."(Pode representar "Ana"por "A".)

(iii) "Se não chove todos vão à praia."

(iv) "Toda a mãe protege os seus filhos."

9. (a) Diga quando é que duas fórmulas bem formadas do cálculo de predicados se dizem logicamente equivalentes.

   (b) Apresente uma interpretação para a qual a fórmula bem formada $p(t) \wedge \forall x q(x)$ seja verdadeira e $\forall x(p(x) \wedge q(x))$ seja falsa.

   (c) As duas fórmulas da alínea anterior serão logicamente equivalentes? Justifique.

   (d) Atendendo às alíneas anteriores, é evidente que não se pode deduzir $\forall x(p(x) \wedge q(x))$ de $p(t)$ e $\forall x q(x)$. Descubra então o(s) erro(s) da seguinte demonstração formal:

1. $\forall x q(x)$	premissa
2. $q(t)$	1 e EU
3. $p(t)$	premissa
4. $p(t) \wedge q(t)$	3, 2 e LC
5. $\forall x(p(x) \wedge q(x))$	4 e IU

   (e) Faça uma demonstração formal do teorema: $\forall t p(t), \forall x q(x) \vdash \forall x(p(x) \wedge q(x))$.

10. Nas alíneas seguintes consideram-se as fórmulas bem formadas $\forall y\, a(y) \to \forall y\, b(y)$ e $\forall z(a(z) \to b(z))$.

    (a) Dê um exemplo de um universo e significados para os predicados $a(x)$ e $b(x)$ que tornem $\forall y\, a(y) \to \forall y\, b(y)$ verdadeira e $\forall z(a(z) \to b(z))$ falsa. Justifique sucintamente.

    (b) Diga quando é que duas fórmulas bem formadas se dizem logicamente equivalentes. Conclua se $\forall y\, a(y) \to \forall y\, b(y)$ e $\forall z(a(z) \to b(z))$ são ou não logicamente equivalentes.

    (c) Faça uma demonstração formal de que $\forall z(a(z) \to b(z)), \forall y\, a(y) \vdash \forall y\, b(y)$

    (d) Usando as alíneas anteriores, averigue se é ou não correcta cada uma das afirmações:

    (i) $\forall y\, a(y) \to \forall y\, b(y) \vdash \forall z(a(z) \to b(z))$ (ii) $\forall z(a(z) \to b(z)) \vdash \forall y\, a(y) \to \forall y\, b(y)$

11. Indique o(s) erro(s) na seguinte "demonstração formal"de que de $\forall x \exists y\, (p(x) \to q(x, y))$ se deduz $\forall z\, (p(z) \to q(z, c))$:

1. $\forall x \exists y\,(p(x) \to q(x,y))$	premissa
2. $\exists y\,(p(z) \to q(z,y))$	1. e EU
3. $p(z) \to q(z,c)$	2. e EE
4. $\forall z\,(p(z) \to q(z,c))$	3. e IU

12. (a) Atribuindo ao predicado $p(x,y)$ a interpretação $x+y=0$, apresente, justificando convenientemente, um universo para o qual a fbf $\forall x \exists y\, p(x,y)$

    i. seja verdadeira;

    ii. seja falsa.

    (b) Diga quando é que uma fórmula bem formada do cálculo de predicados se diz contraditória e averigue se a fórmula bem formada $(\forall z \exists w\, p(z,w)) \to (\forall z\, p(z,c))$ é ou não contraditória.

    (c) Indique o(s) erro(s) na seguinte "demonstração formal" de que de $\forall z \exists w\, p(z,w)$ se deduz $\forall z\, p(z,c)$:

1. $\forall z \exists w\, p(z,w)$	premissa
2. $\exists w\, p(z,w)$	1. e EU
3. $p(z,c)$	2. e EE
4. $\forall z\, p(z,c)$	3. e IU