Notas de

Matemática Discreta

LURDES SOUSA

Departamento de Matemática

Escola Superior de Tecnologia de Viseu

Instituto Politécnico de Viseu

2005/06

Capítulo I

Cálculo Proposicional[1]

1 Proposições e conectivos lógicos

Consideremos os raciocínios seguintes:

a) – O livro é do João ou do Rui.
   – O livro não é do Rui.
   – Logo é do João.

b) – Se ela foi ao Egipto então esteve no Cairo.
   – Ela não esteve no Cairo.
   – Logo não foi ao Egipto.

c) – Ele pratica futebol e ténis.
   – Logo ele pratica futebol.

Estes raciocínios são constituídos por afirmações que são verdadeiras ou falsas. Acerca de cada um deles é fácil concluir de que se trata de um raciocínio correcto. Grande parte das nossas operações mentais no dia a dia envolvem raciocínios deste tipo. Eles vão ser objecto de estudo no que se segue.

Chama-se *proposição* a uma expressão da qual faz sentido dizer que é verdadeira ou que é falsa.

Cada proposição tem um e um só *valor lógico*, entre dois possíveis, **V** (verdadeiro) ou **F** (falso).

1.1 Exemplos. "Lisboa é uma cidade portuguesa."é uma proposição com valor lógico verdadeiro. Mas atribuir um valor lógico à afirmação "Hoje está um belo dia!"já não faz

[1]Para uma boa compreensão dos assuntos aqui tratados é necessária a participação nas aulas teóricas.

sentido, pois trata-se da expressão de um sentimento de alguém, não de uma afirmação objectiva.

A lógica que vamos estudar pressupõe os seguintes princípios:

Princípio da não contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio do terceiro excluído: Uma proposição é verdadeira ou falsa.

A afirmação "O livro é do João ou do Rui."pode decompor-se em duas afirmações: "O livro é do João."e "O livro é do Rui."Estas duas últimas afirmações já não se podem decompor. Dizemos então que a proposição 'O livro é do João ou do Rui."é composta e as afirmações "O livro é do João."e "O livro é do Rui."são atómicas.

A afirmação "Ela não esteve no Cairo."é a negação de "Ela esteve no Cairo."Construimos proposições compostas a partir de proposições atómicas ligando-as por conectivos. Se denotarmos por p a proposição "Ela esteve no Cairo."e usarmos o símbolo $\neg$ para representarmos a negação, a afirmação "Ela não esteve no Cairo."escreve-se $\neg p$. Temos assim a operação "negação".

Analogamente, usando $\vee$ para representar "ou", e as letras p e q para designar as proposições atómicas de "O livro é do João ou do Rui.", obtemos, simbolicamente, $p \vee q$. Trata-se aqui da operação "disjunção".

A seguir apresenta-se uma lista destas e doutras operações lógicas:

negação:	$\neg p$	(não p)
conjunção:	$p \wedge q$	(p e q)
disjunção:	$p \vee q$	(p ou q)
implicação:	$p \rightarrow q$	(se p então q; p só se q; p é condição suficiente para que q; q é condição necessária para que p)
equivalência (formal): (bicondicional)	$p \leftrightarrow q$	(p equivalente a q)
disjunção exclusiva:	$p \dot{\vee} q$	(ou p ou q)

Quando temos uma implicação $p \rightarrow q$ dizemos que p é o antecedente e q o consequente.

As operações anteriores têm tabelas de valores que vão ao encontro da forma corrente do significado das partículas "não", "e", "ou", etc. Essas tabelas apresentam-se de seguida. (Deve certficar-se de que compreende a forma natural como surgem estas tabelas, de acordo com o nosso entendimento da linguagem do dia-a-dia.)

Tabelas de verdade das operações lógicas

Uma tabela de verdade faz corresponder aos possíveis valores lógicos das variáveis o correspondente valor lógico da expressão. Seguem-se as tabelas das operações lógicas enumeradas atrás.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Lógica e operações-*bit*:

Os computadores representam informação por meio de *bits*. Um *bit* tem dois valores possíveis, 0 e 1. Um *bit* pode ser usado para representar os valores de verdade **F** e **V**, 0 representa **F** e 1 representa **V**. Uma variável diz-se booleana se o seus valores possíveis são **V** ou **F** (ou, se quisermos, 1 ou 0). Portanto, uma variável booleana pode ser representada por meio de um *bit*.

1.2 Exercícios.

1. Quais das seguintes frases são proposições?
   (a) Isto é verdade? (b) João é um nome.
   (c) 8 é um número ímpar. (d) 8 é um número par. (e) Esta cor é bonita.

2. Indique os valores lógicos das proposições seguintes:
   (a) 7 é um número primo. (b) Lisboa é uma cidade. (c) Canadá é uma cidade.

3. Diga quais das seguintes proposições são atómicas e quais são compostas:
   (a) O Frederico é alto, e o Joaquim também. (b) O carro acidentado era azul ou verde.
   (c) O carro acidentado era meu. (d) Se fores ao bar, então eu vou ao bar.

4. Usando os símbolos r e h para "Manuel é rico" e "Manuel é feliz", respectivamente, escreva as seguintes afirmações na forma simbólica:
   (a) Manuel é rico. (b) Manuel é rico e feliz.
   (c) Manuel é rico ou feliz. (d) Se Manuel é rico, então é feliz.

5. Identifique todas as proposições atómicas nas frases seguintes e represente-as por símbolos p, q, r, etc. Em seguida escreva as frases sob a forma de cálculo proposicional.

   (a) Se a Maria está no ginásio, então a Marta também está no ginásio.

   (b) O carro do Rui é vermelho ou castanho.

   (c) Se te levantares às sete horas, chegarás a tempo.

   (d) Chegarás a tempo se e só se te levantares às sete horas.

   (e) Ele virá se tu o avisares.

   (f) É suficiente que o João tenha 9,5 para que passe.

   (g) Amanhã vou de autocarro ou de táxi.

   (h) Amanhã vou de autocarro se ele parar no Rossio, ou vou de táxi se tiver dinheiro.

   (i) Se acabar o meu trabalho vou para a praia se fizer bom tempo.

6. Escreva as tabelas de verdade para:

   (a) $p \vee (q \wedge r)$ (b) $\neg(\neg p \vee \neg q)$

   (c) $(\neg \wedge (\neg q \wedge r)) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ (d) $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (r \wedge p)$

   (e) $(p \vee (q \wedge r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (r \vee s))$ (f) $(p \vee \neg q) \leftrightarrow (r \wedge p)$

   (g) $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow p)$ (h) $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \vee \neg p$

7. Escreva cada uma das seguintes proposições na forma simbólica.

   (a) Uma condição necessária para x ser primo é que x seja ímpar ou $x = 2$.

   (b) Uma condição suficiente para que f seja contínua é que f seja diferenciável.

   (c) Ele vai morrer hoje, a menos que consiga auxílio médico.

   (d) Se os impostos forem aumentados ou diminuirem os gastos governamentais, não haverá inflação.

8. Qual o valor de verdade das seguintes proposições?

   (a) O número 2 é primo ou 4 é ímpar. (b) O número 2 não é primo e 4 é ímpar.

   (c) O número 2 é primo e 4 é ímpar. (d) O número 2 não é primo ou 4 é ímpar.

   (e) Se 2 não for primo então 4 é ímpar. (f) Se 2 for primo então 4 é ímpar.

   (g) Se 2 não for primo então 4 é par. (h) Se 2 não for primo e 4 for par então $4 < 2$.

9. Escreva a negação das proposições (a), (b), (c) e (i) do exercício 5.

10. Escreva a recíproca das proposições (a), (e) e (i) do exercício 6.

11. Escreva cada uma das frases seguintes na forma de implicação ($p \rightarrow q$):

    (a) Se estragares o meu livro não volto a emprestar-to.

    (b) Toca nesse bolo e arrepender-te-ás.

    (c) Sai ou chamo a polícia.

    (d) Vou-me embora se não pararem de falar.

2 Fórmulas bem formadas e semântica

Relativamente a uma dada linguagem lógica podemos sempre estudar dois aspectos: a sintaxe e a semântica. A sintaxe diz respeito às regras de formação das expressões lógicas a utilizar, as chamadas fórmulas bem-formadas. A semântica estuda o significado dessas expressões.

Linguagem (conjunto de símbolos) $\left\langle \right.$ sintaxe (fórmulas bem-formadas); semântica (significado)

Na linguagem do cálculo proposicional vamos considerar a sintaxe e a semântica seguintes.

Sintaxe:

Uma variável proposicional é um símbolo p, q, r, ... ao qual podemos atribuir o valor lógico V ou F. Uma *proposição atómica* ou *átomo* é uma variável proposicional ou uma constante, V ou F.

Uma *fórmula bem formada* (abreviadamente, *fbf*) fica definida da seguinte forma (supondo que consideramos apenas os conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$):

- V e F são fbf's; toda a variável proposicional é uma fbf;
- Se A e B são fbf's, as seguintes são também fbf's:

$$\neg A$$

$$(A \wedge B)$$

$$(A \vee B)$$

$$(A \to B)$$

$$(A \leftrightarrow B)$$

- Toda a fbf é formada por estas regras.

Os parêntesis funcionam como símbolos auxiliares que indicam como é formada a fbf. Para evitar um uso excessivo de pareêntesis e simplificar a escrita das expressões lógicas convenciona-se que as operações lógicas são consideradas pela seguinte ordem de prioridade:

$$\neg$$

$$\wedge$$

$$\vee$$

$$\to$$

$$\leftrightarrow$$

Atentando na definição de fbf acabada de dar, é fácil de ver que as expressões

$$p \vee \neg q \wedge r\,,\ (p \vee \neg q) \wedge r\,,\ \neg(p \to q \wedge r) \ \text{ e } \ \neg p \to q \wedge r$$

são fbf's, ao passo que as expressões

$$\neg \wedge p \vee q \ \text{ e } \ p \vee (\wedge q \to r)$$

o não são.

Se F é uma fbf da forma $\neg A$, A diz-se uma *subfórmula bem formada* (abreviadamente, *subfbf*) de F; analogamente se F é uma fbf da forma $A \wedge B$, $A \vee B$ ou $A \to B$, A e B dizem-se *subfbf*'s de F. Se C é uma subfbf de G e G é uma subfbf de F então C é uma subfbf de F.

Uma fbf que não seja proposição atómica diz-se *proposição composta*.

Semântica:

Dada uma fbf, interpretando cada uma das suas variáveis proposicionais, V ou F, obtemos uma interpretação (significado) para a fbf.

É claro que a cada fbf corresponde uma e uma só tabela de verdade.

Uma fbf diz-se uma *tautologia* se for verdadeira para todos os possíveis valores lógicos dos átomos.

Uma fbf diz-se uma *contradição* se for falsa para todos os possíveis valores lógicos dos átomos.

Uma fbf diz-se uma *contingência* se não for nem tautologia nem contradição.

2.1 Exemplo. Suponhamos que queremos averiguar se $p \to p \vee q$ é ou não uma tautologia. Para isso podemos utilizar uma tabela de verdade:

p	q	$p \vee q$	$p \to p \vee q$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Como para quaisquer valores de p e q a fbf $p \to p \vee q$ toma sempre o valor de verdade, conclui-se que é uma tautologia.

Mas não há necessidade de fazer uma tabela de verdade, basta raciocinar do seguinte modo: A implicação só é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso. Mas se p tomar o valor V também $p \vee q$ toma o valo V, obtendo-se $V \to V$ que é V. Logo $p \to p \vee q$ toma sempre o valor de verdade, pelo que é uma tautologia.

2.2 Exercícios.

1. Para cada uma das expressões seguintes diga se são ou não fórmulas bem-formadas.
   (a) $(p\neg q) \wedge p$ (b) $(\neg p \vee q) \wedge p$ (c) $p \vee \wedge q$

2. Ponha parênteses nas expressões seguintes de tal modo que sejam indicadas as regras de prioridade estabelecidas para os conectivos envolvidos.
   (a) $p \wedge q \wedge r \to p$ (b) $p \wedge r \vee q \leftrightarrow \neg r$
   (c) $\neg(p_1 \wedge p_2) \to \neg q \vee p_1$ (d) $p \to q \leftrightarrow \neg q \to \neg q$

3. Obtenha a fórmula bem-formada $p \vee \neg q \wedge (p \to r)$ usando as regras de formação de uma fórmula bem-formada descritas atrás.

4. Averiguar se a fbf $p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \to \neg r$ é ou não uma tautologia.

5. Mostre que são tautologias:
   (a) $(p \leftrightarrow (p \wedge \neg p)) \leftrightarrow \neg p$ (b) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

6. Prove que $((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \leftrightarrow ((\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r))$ é uma contradição.

7. Diga quais das seguintes fórmulas são tautologias, contradições, ou nem uma coisa nem outra.
   (a) $((p \to q) \to \neg(q \to p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ (b) $((p \to q) \to q) \to q$
   (c) $((p \to q) \to p) \leftrightarrow (q \to (q \to p))$ (d) $(p \to (q \wedge \neg q)) \to \neg p$

3 Equivalência Lógica

Duas fbf's dizem-se *(logicamente) equivalentes* se tiverem o mesmo significado, isto é, a mesma tabela de verdade. Para indicar que duas fbf's A e B são equivalentes, escrevemos

$$A \equiv B\,.$$

Em vez do símbolo $\equiv$ também se usa $\Leftrightarrow$. Note-se que dizer que A e B são logicamente equivalentes é o mesmo que dizer que $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia.

Algumas equivalências básicas:

$p \vee \neg p \equiv V$ $p \wedge \neg p \equiv F$	Lei do terceiro excluido Lei da contradição
$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Leis da identidade
$p \vee V \equiv V$ $p \wedge F \equiv F$	Leis da absorção
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leis da idempotência
$\neg(\neg p) \equiv p$	Lei da dupla negação
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leis da comutatividade
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leis da associatividade
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leis da distributividade
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leis de De Morgan

Todas estas equivalências são de fácil verificação. Por exemplo, construindo as tabelas de verdade de $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

concluimos que ambas as fbf's têm o mesmo valor lógico para os mesmos valores das variáveis proposicionais, logo são logicamente equivalentes.

A regra seguinte permite-nos obter uma fbf logicamente equivalente a uma dada fbf.

> *Se numa fbf substituirmos uma subfbf por uma fbf equivalente obtemos uma fbf equivalente à fbf original.*

É muitas vezes útil utilizar as seguintes equivalências (verifique-as):
$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Associadas a uma implicação $p \to q$ temos as duas fbf's seguintes:
(a) $q \to p$ que se diz a *recíproca* de $p \to q$;
(b) $\neg q \to \neg p$ que se diz a *contraposta* de $p \to q$.

3.1 Exercícios.

1. Mostre que $p \to q$ é logicamente equivalente à sua contraposta mas <u>não é</u> logicamente equivalente à sua recíproca.

2. Use propriedades das conjunção, disjunção e negação para provar as seguintes equivalências:

   (a) $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \equiv q \wedge (p \vee r)$
   (b) $\neg(\neg(p \wedge q) \vee p) \equiv \mathrm{F}$
   (c) $\neg(\neg p \vee \neg(r \vee s)) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s)$
   (d) $(p \vee r) \wedge (q \vee s) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge s) \vee (r \wedge q) \vee (r \wedge s)$

3. Simplifique as expressões seguintes:

   (a) $(p \wedge \mathrm{V}) \wedge (q \wedge \mathrm{V})$
   (b) $(r \wedge (q \wedge (p \wedge r)))$
   (c) $(r \wedge \mathrm{V}) \wedge (q \wedge \neg r)$
   (d) $(q \wedge r \wedge s) \vee (q \wedge \neg r \wedge s)$
   (e) $(p \vee r) \wedge (p \vee r \vee s)$
   (f) $(p \vee (q \wedge s)) \vee (\neg q \wedge s)$
   (g) $p \vee \neg q \vee (p \wedge q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge \neg p \wedge q$
   (h) $\neg((p \vee q) \wedge r) \vee q$
   (i) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \vee \neg(\neg(p \vee \neg r) \wedge q)$

4. Construa para cada caso proposições compostas P e Q por forma a que as proposições apresentadas sejam tautologias:

   (a) $P \wedge Q$ (b) $P \rightarrow \neg P$

5. Use a tautologia $p \vee \neg p$ para provar que as seguintes proposições são tautologias.

   (a) $(p \rightarrow q) \vee \neg(p \rightarrow q)$ (b) $\neg p \vee \neg\neg p$ (c) $((p \wedge s) \vee q) \vee \neg((p \wedge s) \vee q)$

6. Mostre que a fórmula $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ não é uma tautologia. Encontre fórmulas ϕ e ψ tais que $(\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg\psi)$ seja uma contradição.

7. Mostre que $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \rightarrow q$ é uma tautologia e use esta tautologia para provar que $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg\neg p \rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg q$.

8. Determine expressões logicamente equivalentes às seguintes mas sem os conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$:

   (a) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$ (b) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q \leftrightarrow q)$ (c) $\neg p \rightarrow \neg q$

4 Argumentos correctos

No nosso dia a dia raciocinamos e tiramos conclusões usando determinadas regras. A lógica ajuda a compreender essas regras permitindo distinguir entre argumentos correctos e não correctos. Seguem-se alguns argumentos lógicos, cada um deles com um exemplo e a respectiva formalização.

1)

1. Se o gato vê o peixe, então o gato apanha o peixe.
2. Se o gato apanha o peixe, então o gato come o peixe.

---

3. Se o gato vê o peixe, então o gato come o peixe.

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$

---

3. $p \rightarrow r$

2)

1. Se o João tem mais de 16 anos, então vai ao cinema.
2. O João tem mais de 16 anos.

---

3. O João vai ao cinema.

1. $p \rightarrow q$
2. p

---

3. q

3)

1. A Maria traz as bebidas ou faz um bolo.
2. A Maria não faz um bolo.

---

3. A Maria traz as bebidas.

1. $p \vee q$
2. $\neg q$

---

3. p

Um argumento da forma "De A_1, A_2, ... e A_n deduz-se B.", esquematicamente,

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_n \\ \hline B \end{array}$$

diz-se um *argumento correcto* se $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B$ for uma tautologia. Neste caso escrevemos

$$A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n \models B$$

Para indicar que $P \models Q$ também se usa $P \Rightarrow Q$, nomenclatura que faz parte do dia a dia da escrita matemática.

4.1 Exercícios.

1. Use os símbolos proposicionais p e q para formalizar os seguintes argumentos lógicos:

   (a) Se 10 é um número primo, 10 não pode ser igual a 2 vezes 5. 10 é igual a 2 vezes 5. Logo, 10 não pode ser um número primo.

(b) Se chove frequentemente, os agricultores queixam-se. Se não chove frequentemente, os agricultores queixam-se. Consequentemente, os agricultores queixam-se.

(c) O António almoça na cantina ou o António almoça em casa. O António não almoça na cantina. Logo, o António almoça em casa.

2. Verifique se o argumento seguinte está correcto (i. e., se a conclusão é logicamente implicada pela conjunção das hipóteses).

   "Se o orçamento não for cortado, uma condição necessária e suficiente para os preços permanecerem estáveis é que os impostos sejam aumentados. Os impostos serão aumentados somente se o orçamento não for cortado. Se os preços permanecerem estáveis, os impostos não serão aumentados. Portanto os impostos não serão aumentados."

3. Mostre que os seguintes argumentos são correctos, usando tabelas de verdade.

   (a) $p \vee q,\ \neg p \vee r \models q \vee r$ (b) $p \to q,\ p \to r \models p \to q \wedge r$

   (c) $p,\ p \to q \models p \wedge q$ (d) $p \vee q,\ p \to r,\ q \to r \models r$

4. Num certo país cada habitante diz sempre a verdade ou diz sempre a mentira. Um viajante nesse país encontra o Pedro e a Luísa. O Pedro disse-lhe: "Se eu digo sempre a verdade, então a Luísa também diz sempre a verdade." Será Pedro um mentiroso ou, pelo contrário, diz sempre a verdade? E a Luísa?

   Nesse mesmo país, o viajante encontrou o António e o Manuel e este último disse-lhe: "Se eu sou mentiroso então o António também é mentiroso."Que pode concluir quanto a cada um deles ser ou não dos que dizem sempre a verdade?

5 Formas normais

Uma *função de verdade* (ou *função lógica*) é uma função que só pode tomar os valores lógicos V ou F e cujos argumentos também só podem tomar esses valores. Por exemplo,

$$f(p,q) = \begin{cases} \text{V se } p \text{ é V} \\ \text{V se } p \text{ e } q \text{ são ambas F} \\ \text{F se } p \text{ é F e } q \text{ é V} \end{cases}$$

define uma função de verdade.

A seguir vamos ver que

Toda a função de verdade é equivalente a uma fbf.

Para isso vamos usar as definições que se seguem.

Um *literal* é uma variável proposicional ou a sua negação. Exemplos: p e $\neg p$. As duas expressões, p e $\neg p$ dizem-se *literais complementares*.

Uma fbf diz-se uma *forma normal disjuntiva (FND)* se for uma disjunção de conjunções de literais, ou se for V ou F.

Analogamente, fbf diz-se uma *forma normal conjuntiva (FNC)* se for uma conjunção de disjunções de literais, ou se for V ou F.

Exemplos de formas normais disjuntivas:

$$p$$

$$\neg p$$

$$p \vee \neg q$$

$$\neg p \wedge q$$

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

$$p \vee (p \wedge r)$$

Exemplos de formas normais conjuntivas:

$$p$$

$$\neg p$$

$$p \wedge \neg q$$

$$\neg p \vee q$$

$$p \wedge (q \vee r)$$

Tabelas de verdade e formas normais:

Suponhamos que temos uma função de verdade f dada pela tabela de verdade

p	q	r	f
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

e que pretendemos escrever f como a disjunção de conjunções de literais, portanto, como uma forma normal disjuntiva. Ora, pela tabela de verdade de f, sabemos que f é verdadeira para cada um dos casos seguintes:

- p, q e r verdadeiras
- p, $\neg q$ e r verdadeiras
- $\neg p$, $\neg q$ e r verdadeiras

Então, tendo em conta que a disjunção de um número finito de fbf's é **V** se e só se uma delas o for, concluimos que

$$f \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)\,.$$

Ou seja, f é **V** se e só se

$$p \wedge q \wedge r \equiv \mathbf{V} \;\text{ ou }\; p \wedge \neg q \wedge r \equiv \mathbf{V} \;\text{ ou }\; \neg p \wedge \neg q \wedge r \equiv \mathbf{V}.$$

Por outro lado, f é falsa para

- $\neg p$, $\neg q$ e r falsas
- $\neg p$, q e r falsas
- p, $\neg q$ e $\neg r$ falsas
- p, $\neg q$ e r falsas
- p, q e r falsas

Então, atendendo a que a conjunção de fbf's é falsa se e só se uma delas é falsa, concluimos que

$$f \equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)\,.$$

O que acabámos de fazer para este exemplo pode ser feito para qualquer função de verdade; antes da descrição do procedimento geral a seguir, vamos definir termos mínimos e máximos.

Seja f uma fbf. Um *termo mínimo* (*termo máximo*, respectivamente) de f é uma conjunção (respectivamente, disjunção) de literais onde as variáveis são as de f e cada uma delas é representada uma e uma só vez.

Por exemplo, se as variáveis de f são p, q e r, são termos mínimos de f, por exemplo,

$$p \wedge \neg q \wedge r$$

$$\neg p \wedge q \wedge r$$

$$p \wedge q \wedge r$$

mas não são termos mínimos de f, $p \wedge q$, nem $p \wedge \neg r$.

De um modo geral, dada a tabela de verdade de uma fbf f, procedemos do seguinte modo para obter uma forma normal disjuntiva (respectivamente, conjuntiva) de f:

> Seleccionamos os termos mínimos (respectivamente, termos máximos) de f que tornam f verdadeira (respectivamente, falsa) e formamos a disjunção (respectivamente, conjunção) destes termos mínimos.

Uma fórmula proposicional f diz-se escrita na *forma normal disjuntiva plena* (repectivamente, *forma normal conjuntiva plena*) se estiver expressa como uma disjunção (respectivamente, conjunção) de termos mínimos (respectivamente, máximos) de f.

Portanto, no exemplo anterior, obtivemos uma forma normal disjuntiva plena e uma forma normal conjuntiva plena.

Obtenção de formas normais através de manipulações algébricas:

- Para obter uma forma normal conjuntiva:

  1. "Tiram-se"todos os $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.
  2. Se a expressão contém negações de conjunções ou negações de disjunções, fazem-se desaparecer usando as leis de De Morgan.
  3. Agora basta usar as duas propriedades distributivas seguintes

$$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$(a \wedge b) \vee c \equiv (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

- Para obter uma forma normal disjuntiva: Procede-se de forma análoga, usando agora em 3. as propriedades

$$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$(a \vee b) \wedge c \equiv (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Se f é uma fórmula proposicional onde só aparecem os conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, a *dual de* f é a fórmula que se obtém de f substituindo cada V por F, cada F por V, cada $\wedge$ por $\vee$ e cada $\vee$ por $\wedge$.

Se f é uma fórmula proposicional, o *complemento de* f obtém-se formando primeiro o dual de f e depois substituindo todos os literais pelos seus complementos. De facto, o complemento de f é a negação de f.

Exemplo: Pretende-se negar $f = (p \wedge q) \vee \neg r$, usando complementação. Ora, a dual de f é $(p \vee q) \wedge \neg r$. Logo

$$\neg f \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge r\,.$$

5.1 Exercícios.

1. Encontre uma fórmula restrita (i.e., contendo apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$) correspondente à função de verdade $f(p, q, r)$ dada na seguinte tabela:

p	q	r	$f(p,q,r)$
V	V	V	V
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	F
V	V	F	F
F	V	F	F
V	F	F	V
F	F	F	F

2. Determine a forma normal conjuntiva das seguintes expressões:

   (a) $(p \to q) \leftrightarrow (p \to r \vee q)$ (b) $(p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge s)) \vee (p \wedge q \wedge s)$

3. Determine uma forma normal disjuntiva e uma forma normal conjuntiva logicamente equivalente à fórmula $(p \to q) \to r$.

4. Seja f a função lógica dada pela tabela seguinte:

p	q	r	$f(p,q,r)$
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	F
F	V	V	F
V	F	F	V
V	F	V	F
V	V	F	F
V	V	V	V

   (a) Determine a forma normal disjuntiva de f.

   (b) Determine a forma normal conjuntiva de f.

6 Conjuntos de conectivos lógicos completos

Os conectivos lógicos habitualmente usados para formar as fbf's do cálculo proposicional são $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$. É sabido que qualquer fbf pode ser substituída por outra logicamente equivalente e onde não figura o símbolo $\rightarrow$.

Um conjunto de conectivos lógicos diz-se *completo* se toda a fbf do cálculo proposicional é equivalente a uma fbf onde figuram apenas conectivos desse conjunto. Assim, $\{\neg, \wedge, \vee\}$ é completo.

6.1 Exercícios.

1. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos de conectivos é completo para o cálculo proposicional:

   (a) $\{\neg, \rightarrow\}$ (b) $\{\neg, \wedge\}$ (c) $\{\neg, \vee\}$

2. Determine fórmulas logicamente equivalentes a $p \rightarrow q$

   (a) usando apenas o conectivo $|$ ($p|q$ é logicamente equivalente a $\neg(p \wedge q)$);

   (b) usando apenas o conectivo $\downarrow$ ($p \downarrow q$ é logicamente equivalente a $\neg(p \vee q)$).

3. Suponha que o argumento ϕ_1, ϕ_2,..., $\phi_n \models \phi$ é válido. Prove que ϕ_1, ϕ_2,..., $\phi_{n-1} \models \phi_n \rightarrow \phi$ é também um argumento válido.

4. O conectivo lógico conhecido por "ou exclusivo" e representado por $\dot{\vee}$, é definido pela seguinte tabela de verdade:

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

   (a) Mostre que $p \dot{\vee} q$ é equivalente a $\neg(p \leftrightarrow q)$.

   (b) Construa a tabela de verdade para $(p \dot{\vee} q) \dot{\vee} r$.

5. Determine fórmulas contendo apenas os conectivos $\neg$ e $\rightarrow$ logicamente equivalentes a

   (a) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s)$ (b) $p \leftrightarrow q$

7 Sistemas formais

Um *sistema formal* S consiste em:

1. Um conjunto (numerável) de *símbolos*.
2. Um conjunto de sequências finitas destes símbolos que constituem as chamadas *fórmulas bem formadas* (abreviadamente fbf).
3. Um subconjunto de fbf's chamadas *axiomas*.
4. Um conjunto finito de "regras de dedução"chamadas *regras de inferência* que permitem deduzir uma fbf como consequência directa de um conjunto finito de fbf's.

Seja S um sistema formal. Seja C um conjunto de fbf's e seja P uma fbf em S.
P *é deduzível de* C *em* S, e escreve-se

$$C \vdash_S P$$

(ou apenas $C \vdash_S P$ se não houver dúvidas sobre o sistema $\mathcal{S}$ a que nos referimos) se existir uma sequência finita de fbf's, $P_1, P_2, ..., P_n$ tais que:

- $P_n = P$
- Para cada $i \in \{1, ...n\}$, P_i é um axioma ou uma fbf em C (dita *premissa* ou *hipótese*) ou uma consequência dos P_i's anteriores através de uma das regras de inferência.

A sequência dos P_i's diz-se uma *prova formal* (ou *demonstração formal*) de P a partir de C.

Se P é deduzível de um conjunto vazio escreve-se

$$\vdash_S P$$

Neste caso, P diz-se um *teorema* em S

Associada a um sistema formal podemos ter uma semântica (interpretação) que permite que cada fbf possa ser considerada como verdadeira ou falsa de acordo com a interpretação das suas variáveis.

Um sistema formal S diz-se:

Completo, se toda a fbf que é verdadeira para todas as interpretações possíveis pode ser demonstrada em S;

Correcto (ou sólido), se toda a fbf que pode ser demonstrada em S é verdadeira para todas as interpretações.

Vamos a seguir descrever um sistema formal natural e um sistema formal de Hilbert, o que certamente ajudará a compreender a noção de sistema formal acabada de dar.

Sistema formal natural $\mathcal{L}$

1. Símbolos:
   a) variáveis proposicionais
   b) conectivos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
   c) símbolos auxiliares: (e)
2. Fórmulas bem formadas: de acordo com o definido atrás.
3. Axiomas: não tem.
4. Regras de inferência: as da Tabela RI.

Tabela RI

$A,\ B \vdash A \wedge B$	Lei da combinação
$A \wedge B \vdash B$	Lei da simplificação
$A \wedge B \vdash A$	Variante da lei da simplificação
$A \vdash A \vee B$	Lei da adição
$B \vdash A \vee B$	Variante da lei da adição
$A,\ A \rightarrow B \vdash B$	Modus ponens
$\neg B,\ A \rightarrow B \vdash \neg A$	Modus tollens
$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$	Silogismo hipotético
$A \vee B,\ \neg A \vdash B$	Silogismo disjuntivo
$A \vee B,\ \neg B \vdash A$	Variante do silogismo disjuntivo
$A \rightarrow B,\ \neg A \rightarrow B \vdash B$	Lei dos casos
$A \leftrightarrow B \vdash A \rightarrow B$	Eliminação da equivalência
$A \leftrightarrow B \vdash B \rightarrow A$	Variante da eliminação da equivalência
$A \rightarrow B,\ B \rightarrow A \vdash A \leftrightarrow B$	Introdução da equivalência
$A,\ \neg A \vdash B$	Lei da inconsistência

Um teorema muito útil é o seguinte:

Teorema da Dedução. Sejam A, B, A_1, A_2, ..., A_n fórmulas bem formadas. Se

$$A_1\, A_2,\ ...,\ A_n, A \vdash B$$

então

$$A_1,\, A_2,\, ...,\, A_n \vdash A \to B\,.$$

Por outras palavras:

Se das premissas $A_1\, A_2$, ..., A_n e A deduzimos B então das premissas A_1, A_2, ..., A_n deduzimos $A \to B$.

As regras de inferência da Tabela RI juntamente com o Teorema da Dedução fazem de $\mathcal{L}$ um sistema completo, i. e., se $A \models B$, ento $A \vdash B$. 0 sistema $\mathcal{L}$ é também correcto, i. e., se $A \vdash B$, então $A \models B$.

Consequentemente, A_1, A_2, ..., $A_n \vdash B$ se e só se $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \to B$ é uma tautologia; de igual modo uma fbf P é um teorema em $\mathcal{L}$ se e só se for uma tautologia.

7.1 Exemplos de demonstrações formais em $\mathcal{L}$:

Cada uma das propriedades da Tabela RI pode ser designada por uma abreviatura, por exemplo, MP para modus ponens, MT para modus tollens, e assim por diante. É esta abreviatura que se usa na justificação de cada um dos passos das demonstrações formais dos dois teoremas que se seguem.

Teorema: $A \vee B \vdash \neg A \to B$

Pelo Teorema da Dedução (TD) basta provar o seguinte

Teorema: $A \vee B,\, \neg A \vdash B$

Prova:

1.	$A \vee B$	premissa
2.	$\neg A$	premissa
3.	B	l., 2. e SD

Teorema: $A \to (B \to C),\, A \to B,\, A \vdash C$.

Prova:

1.	$A \to (B \to C)$	premissa
2.	$A \to B$	premissa
3.	A	premissa
4.	B	MP, 2. e 3.
5.	$B \to C$	MP, 1. e 3.
6.	C	MP, 4. e 5.

Aplicando o TD sucessivamente ao teorema anterior, obtém-se o

Teorema: $A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$

Sistema formal de Hilbert $\mathcal{H}$

1. Símbolos
   (a) variáveis proposicionais
   (b) conectivos lógicos: $\neg$ e $\to$
   (c) símbolos auxiliares: (e)
2. Fórmulas bem formadas
   (a) fórmulas atómicas
   (b) fórmulas compostas: Se A e B são fbf então $\neg A$ e $A \to B$ são tambm fbf's.
3. Axiomas
   H1) $A \to (B \to A)$
   H2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
   H3) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to C)$
4. Regras de inferência (só uma):
   Modus Ponens (MP): A, $A \to B \vdash B$

7.2 Exemplos de demonstrações formais em $\mathcal{H}$:
(usando o Teorema da Dedução)

Teorema: $\vdash A \to A$

Prova:
1. $A \vdash A$
2. $\vdash A \to A$ pelo TD

Teorema: $A \to B$, $B \to C \vdash A \to C$

Prova:

1. $A \to B$	premissa
2. $B \to C$	premissa
3. A	hipótese
4. B	MP, 1. e 3.
5. C	MP, 2. e 4.
6. $A \to B,\ B \to C,\ A \vdash C$	
7. $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$	6. e TD

Teorema: $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Prova:

1. $\neg B \to A$	premissa
2. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$	(H3)
3. $A \to (\neg B \to A)$	(H1)
4. $(\neg B \to A) \to B$	MP, 1. e 2.
5. $A \to B$	t. a., 3. e 4.
6. $\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	TD

7.3 Exercícios.

1. Prove as regras seguintes, usando tabelas de verdade.

   (a) Modus ponens (b) $a \to b,\ (\neg a \to b) \models b$

2. Para cada um dos seguintes argumentos, diga quais das regras de inferência dadas na Tabela RI são usadas.

   (a) Se o João esteve na festa de ontem, então faltou à primeira aula da manhã. O João não faltou à primeira aula da manhã. Consequentemente o João não esteve na festa de ontem.

   (b) Se eu fizer isso, serei criticado, e se o não fizer, serei criticado. Consequentemente, serei criticado.

   (c) Se está frio e húmido, então é claro que está frio.

   (d) Se o Sr. Santos e a Sra. Santos ganham mais de 3 500 contos por ano, a família Santos pode ter férias na Madeira. Como eu sei que o Sr. Santos e a sua esposa ganham mais de 3 500 contos, concluo que a família pode ter férias no Madeira.

   (e) Eu sei que a Francisca levou o Fiat ou o Citroen. A Francisca não levou um Citroen. Consequentemente, levou o Fiat.

(f) Se o Quim está em casa então é certo que ele está em casa ou no escritório.

3. Demonstre os seguintes argumentos. Use como regras de inferência apenas o modus ponens, o modus tollens e a lei da combinação. Indique as regras usadas em cada passagem.

   (a) p, $p \rightarrow (q \vee r)$, $(q \vee r) \rightarrow s \vdash s$

   (b) $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, $\neg r \vdash \neg p$

   (c) p, $p \rightarrow q \vdash p \wedge q$

4. A demonstração seguinte deduz R das premissas $P \vee Q$, $P \rightarrow R$ e $Q \rightarrow R$. Falta colocar as justificações dos vários passos. Complete a demonstração, sabendo que para além das regras de inferência da Tabela RI também se usa o $P \vee Q \models (\neg P \rightarrow Q)$.

   1. $P \vee Q$
   2. $\neg P \rightarrow Q$
   3. $Q \rightarrow R$
   4. $\neg P \rightarrow R$
   5. $P \rightarrow R$
   6. R

5. Dada a premissa $P \wedge Q$, demonstre $P \vee Q$. Use as regras de inferência da simplificação e da adição.

6. Use o Teorema da Dedução para mostrar que $Q \models (P \rightarrow Q)$. Use este resultado para mostrar que $\models Q \rightarrow (P \rightarrow Q)$.

7. Tomando como premissas $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow R$, e $R \rightarrow P$, deduza formalmente $P \leftrightarrow Q$. Use apenas o silogismo hipotético e a lei da introdução da equivalência.

8. Use o Teorema da Dedução e a lei da adição para demonstrar que $\models P \rightarrow (P \vee \neg P)$ e $\models \neg P \rightarrow (P \vee \neg P)$. Que dedução pode fazer imediatamente de $\models P \rightarrow (P \vee \neg P)$ e $\models \neg P \rightarrow (P \vee \neg P)$?

9. Considere o sistema natural $\mathcal{L}$.

   (a) Faça uma demonstração formal de $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$.

(b) Demonstre formalmente que $P \to (Q \to R)$ e $P \wedge Q \to R$ são equivalentes.

10. Apresente uma demonstração formal para a equivalência das seguintes proposições:

    (a) Equivalência entre $(p \vee q) \to r$ e $(p \to r) \wedge (q \to r)$

    (b) Equivalência entre $(p \wedge q) \to r$ e $p \to (q \to r)$

11. Considere o sistema formal de Hilbert $\mathcal{H}$.

    (a) Complete a demonstração do teorema $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ apresentada a seguir, justificando convenientemente cada passo.

    1. $\neg B \to \neg A$
    2. $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$
    3. $A \to (\neg B \to A)$
    4. $(\neg B \to A) \to B$
    5. $A \to B$
    6. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

    (b) Demonstre formalmente os teoremas seguintes:

    (a) $\neg\neg A \to A$ (b) $A \to \neg\neg A$

    (c) $\neg\neg A \equiv A$ (d) $A,\, B \vdash \neg(A \to \neg B)$ (i.e., $A,\, B\ A \wedge B$)

    (e) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (f) $\neg(A \to \neg B) \vdash B$

8 Algumas considerações sobre a demonstração de implicações

Muitos dos teoremas da Matemática são implicações (ou equivalências, que são conjunções de implicações). Para provar que $P \Rightarrow Q$, ou seja, que de P se deduz Q, ou se quisermos, que $P \to Q$ é tautologia, mostra-se que se P é verdadeira também Q o é. Notemos entretanto que são válidas as seguintes equivalências lógicas:

(1) $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

(2) $p \to q \equiv p \wedge \neg q \to \mathbf{F}$

(A verificação de (1) e (2) fica como exercício.)

As propriedades (1) e (2) proporcionam dois métodos para provar uma afirmação da forma $P \Rightarrow Q$. São eles:

1) Prova indirecta, baseada em (1):

2) Prova por contradição (ou redução ao absurdo), usando (2).

Exemplos

1. Vamos fazer uma demonstração indirecta de que "Se $5n+2$ é ímpar então n é ímpar.":

   Suponhamos que n não é ímpar, ou seja, n é par. Então $5n$ também é par, visto que o produto de um número qualquer por outro par é sempre par. Como a soma de dois pares é par, conclui-se que $5n+2$ é par, i.e., $5n+2$ não é ímpar.

2. É bem conhecida a seguinte propriedade:

   (A) "Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são duas sucessões convergentes então a sua soma $(\alpha a_n + \beta b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é convergente (para quaisquer constantes α e β)."

   Vamos provar por contradição a propriedade seguinte (que é também conhecida):

   (B) "Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente então a sucessão $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente."

   Demonstração de (B): Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão divergente . Suponhamos, por contradição, que $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Então a sucessão $((a_n + b_n) - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, atendendo à propriedade (A). Como $(a_n + b_n) - a_n = b_n$, isto significa que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, o que contradiz a hipótese. Consequentemente $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem de ser divergente.

3. Vamos provar que

   $$p \wedge q \to r,\ p,\ \neg r \vdash \neg q$$

   usando prova por contradição. No decorrer da demonstração formal feita a seguir as designações "premissa"e "hipótese"têm dois papéis distintos: As premissas são nete caso $p \wedge q \to r$, p e $\neg r$; chamaremos "hipótese"a uma premissa não dada mas assumida tendo em vista a prova por contradição.

1. $p \wedge q \to r$	premissa
2. p	premissa
3. q	hipótese
4. $p \wedge q$	LC, 2. e 3.
5. r	MP, 1. e 4.
6. $\neg r$	premissa
7. $r \wedge \neg r$	LC, 5. e 6.

Juntando às premissas dadas a negação da conclusão pretendida (ou seja, de $\neg q$), obtivemos a contradição $r \wedge \neg r$. Logo concluimos a veracidade da afirmação $p \wedge q \rightarrow r,\, p,\, \neg r \vdash \neg q$.

9 Exercícios

1. Traduza a frase "Uma condição necessária para que o Jorge tenha 14 a Matemática Discreta é ter estudado muito."em cálculo proposicional, usando p com o significado de "O Jorge tem 14 a Matemática Discreta."e q com o significado de "O Jorge estudou muito."

2. Representando "Faz bom tempo"por p, "Vou à praia"por q, "Passo a Matemática Discreta"por r e "Tenho umas boas férias"por s, traduza as duas frases seguintes em cálculo proposicional:

   (a) "Fazer bom tempo é uma condição necessária para eu ir à praia."

   (b) "Passar a Matemática Discreta é condição suficiente para ter umas boas férias."

3. Defina tautologia e mostre que a fórmula bem formada

   $$p \vee q \vee r \vee s \vee t \rightarrow p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$$

   não é uma tautologia.

4. Demonstre formalmente que das premissas $p \vee q$, $\neg p$ e $q \rightarrow r$ se deduz r.

5. Defina contradição e mostre que a fórmula bem formada

   $$(p \rightarrow q \wedge r \wedge s) \rightarrow p \vee q \vee r \vee t$$

   não é uma contradição.

6. Seja p a proposição "Conduzes a uma velocidade superior a 110."e q a proposição "Apanhas uma multa de velocidade". Traduza as frases seguintes usando p e q e conectivos lógicos.

   (a) Conduzes a uma velocidade superior a 110 mas não apanhas uma multa de velocidade.

   (b) Se não conduzires a uma velocidade superior a 110, não apanhas uma multa de velocidade.

(c) Conduzires a uma velocidade superior a 110 é condição necessária para apanhares uma multa de velocidade.

7. Faça uma demonstração formal de que das premissas $\neg p \rightarrow q \wedge r$, $p \rightarrow s$, $\neg s$ se deduz q.

8. Diga se cada uma das implicações é verdadeira ou falsa, justificando sucintamente:

   (a) Se $1 + 1 = 3$ então os cães têm asas.

   (b) Se $1 + 1 = 2$ então os cães têm asas.

9. Seja p a proposição "Vou passar a todas as disciplinas"e q a proposição "Vou fazer férias no Brasil". Traduza as frases seguintes por meio de fórmulas proposicionais.

   (a) Se passar a todas as disciplinas, vou fazer férias no Brasil.

   (b) Para fazer férias no Brasil é necessário e suficiente que passe a todas as disciplinas.

   (c) Se fizer férias no Brasil, passo a todas as disciplinas.

   (d) Vou fazer férias no Brasil só se passar a todas as disciplinas.

   (e) É condição necessária para fazer férias no Brasil que passe a todas as disciplinas.

   (f) Passo a todas as disciplinas ou vou fazer férias no Brasil.

   (g) Ou passo a todas as disciplinas ou não vou fazer férias no Brasil.

10. Averigue se os seguintes argumentos estão correctos, indicando, para cada argumento correcto, a regra de inferência que é usada.

    (a) O número $\log_2 3$ é irracional se não for igual à razão de dois inteiros. Por conseguinte, como $\log_2 3$ não é igual à razão de dois inteiros, conclui-se que $\log_2 3$ é irracional.

    (b) Se n é um número real tal que $n > 1$, então $n^2 > 1$. Suponhamos que $n^2 > 1$. Então $n > 1$.

    (c) Se n é um número real tal que $n > 3$, então $n^2 > 9$. Suponhamos que $n^2 \leq 9$. Então $n \leq 3$.

    (d) A função f tem derivada nula no ponto a ou não tem derivada em a. Como f tem derivada em a, conclui-se que $f'(a) = 0$.

11. (a) Representando as proposições pelas letras indicadas

    p : "Durmo menos do que 7 horas por dia." q : "Trabalho muito" r : " Estou cansado"

    traduza logicamente as frases seguintes:

    i. "Se durmo menos do que 7 horas por dia então trabalho muito."

    ii. "Se trabalho muito e durmo menos do que 7 horas por dia então estou cansado."

    (b) Quando é que um argumento da forma "De A_1, A_2, ... e A_n deduz-se B"se diz correcto?

    (c) Diga, justificando, se o seguinte argumento é ou não correcto: "Se durmo menos do que 7 horas por dia então trabalho muito. Se trabalho muito e durmo menos do que 7 horas por dia então estou cansado. Eu não estou cansado. Logo eu não trabalho muito."

12. Averigue se os seguintes argumentos estão correctos, indicando, para cada argumento correcto, a regra de inferência da Tabela RI que é usada.

    (a) O resto da divisão de um número par n por 4 é 0 ou 2. Assim, se o resto da divisão de um número par n por 4 não é 0, então é 2.

    (b) Se n é um número primo então é ímpar ou igual a 2. Logo se n é um número par diferente de 2, concluimos que n não é primo.

    (c) Se a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x+1}{2} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, então é contínua em todo o $\mathbb{R}$. Como a função f é contínua em todo o $\mathbb{R}$, concluimos que f é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$.

13. Perante o tribunal compareceram A, B e C, acusados de roubo. Estabeleceu-se que:

    Se A não é culpado, culpado é B ou C.

    Se A não é culpado então C não é culpado.

    Se B é culpado então A é culpado.

    Será possível decidir sobre a culpabilidade de A a partir destes factos? Se sim determine se A é ou não culpado.