Capítulo V

GRAFOS[1]

1 Definições básicas

Um grafo é constituído por um conjunto finito de vértices e um conjunto finito de arcos (ou arestas) que ligam pares de vértices. O diagrama da Figura 1 representa um grafo com 4 vértices e 6 arestas. Mais precisamente: Um *grafo* $G = (V, E, f)$

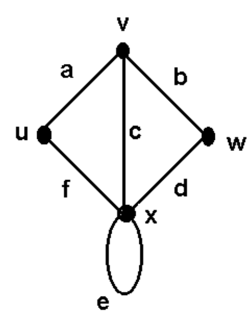


Figura 1: grafo

é constituído por um conjunto não vazio V chamado o conjunto dos *vértices* (ou *pontos* ou *nodos* ou *nós*) do grafo, um conjunto E dito o conjunto das *arestas* (ou *arcos*) do grafo, uma função f do conjunto E das arestas para um conjunto de pares ordenados ou não ordenados de vértices. Se uma aresta tem como imagem um par ordenado, diz-se uma *aresta dirigida*; caso contrário , diz-se uma *aresta não dirigida*.

Se uma aresta $a \in E$ está associada a um par ordenado (u, v) ou a um par não

[1] Para uma boa compreensão dos assuntos aqui tratados é necessária a participação nas aulas teóricas.

ordenado $\{u, v\}$, onde $u, v \in V$, dizemos que a liga os vértices u e v.

Dois vértices ligados por uma aresta dizem-se *adjacentes*. Um vértice que não é adjacente a nenhum outro diz-se *isolado*.

Por vezes representa-se um grafo apenas por G ou por (V, E).

Um grafo no qual todas as aresta são dirigidas diz-se um *grafo dirigido* ou d̆igrafo.

Um grafo no qual todas as arestas são não dirigidas diz-se um ğrafo não dirigido.

Se tiver arestas dirigidas e arestas não dirigidas, diz-se m̆isto.

Se $G = (V, E)$ é um grafo e a é uma aresta associada com o par ordenado (u, v), dizemos que que *a se inicia* (ou *tem origem*) em u e *acaba* (ou *termina*) em v. Dizemos também que a aresta é ĭncidente em u e v.

Uma aresta que liga um vértice a si próprio diz-se l̆acete. O sentido de um lacete não é significativo, portanto um lacete pode ser considerado tanto dirigido como não dirigido.

Na Figura 1, o arco e é um lacete e os vé rtices u e v são adjacentes.

Na Figura 2 representam-se quatro grafos por meio de diagramas.

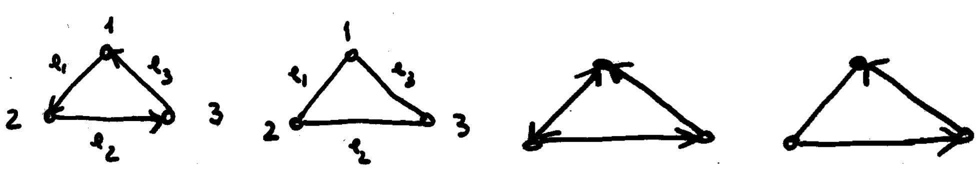


Figura 2: grafos

Podemos ter pares de vértices ligados por mais do que uma aresta. Tais arestas dizem-se *paralelas*. Nos primeiro e segundo grafos da Figura 3 há arestas paralelas mas não no terceiro.

Um grafo que contenha algumas arestas paralelas diz-se *multigrafo*. Neste caso, a aplição f entre arestas e pares de vértices não é injectiva. Por isso, quando se trata de um multigrafo não é conveniente usar a notação abreviada $G = (V, E)$ em vez da notação completa $G = (V, E, f)$.

Se num grafo não existir mais do que uma aresta entre cada par de vértices (não mais do que uma aresta dirigida em cada um dos sentidos, no caso de um grafo

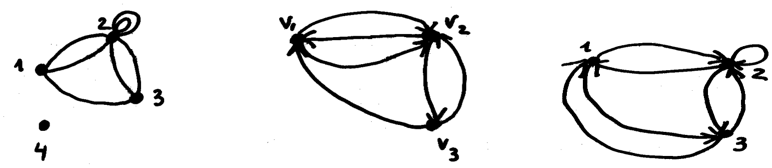


Figura 3: grafos

dirigido) e não tiver lacetes, diz-se um *grafo simples*. Vamos estudar sobretudo grafos simples e, a menos que seja especificado o contrário, quando falarmos de grafos, referir-nos-emos aos simples.

Num grafo dirigido, para cada nodo v, o número de arestas que têm v como nodo inicial diz-se o ğrau fora de v e o número de arestas que têm v como nodo terminal diz-se ğrau dentro. O ğrau total de v é a soma do grau fora com o grau dentro. Se o grafo for não dirigido o ğrau total ou apenas ğrau de v é igual ao número de arestas incidentes em v.

Sejam $G = (V_1, E_1)$ e $H = (V_2, E_2)$ dois grafos tais que $V_1 \subseteq V_2$ e $E_1 \subseteq E_2$. O grafo G diz-se um šubgrafo do grafo H e escreve-se $G \subseteq H$. Na Figura 4, os grafos G, H, K e L são subgrafos de G.

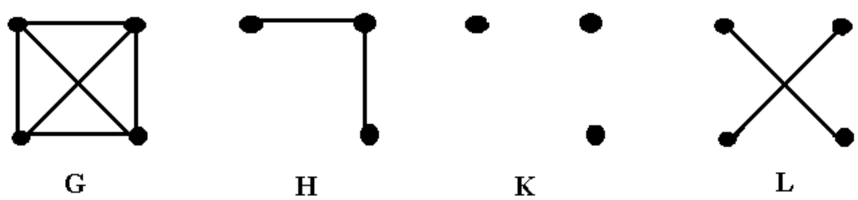


Figura 4: subgrafos

Um grafo (V, E) diz-se čompleto se cada vértice é adjacente a todos os outros vértices do grafo. Denotamos um grafo completo de n vértices por K_n. A Figura 5 representa K_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Um grafo diz-se b̆ipartido se o seu conjunto de vértices V pode ser particionado em subconjuntos V_1 e V_2 tais que os vértices de V_1 não são adjacentes entre si e o mesmo acontece com os vértices de V_2.

A Figura 6 representa um grafo bipartido.

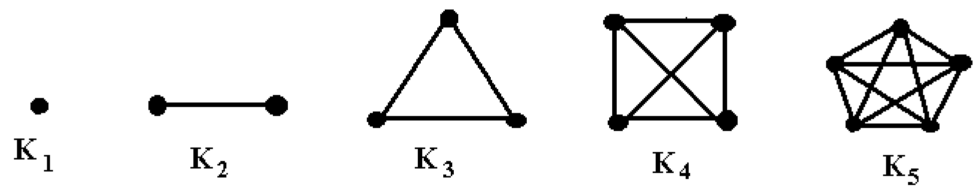


Figura 5: grafos completos

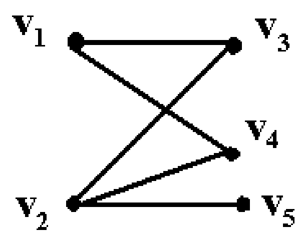


Figura 6: grafo bipartido

Um ğrafo não dirigido pode ser considerado como um grafo dirigido se associarmos a cada aresta não dirigida $\{u, v\}$ duas arestas dirigidas, (u, v) e (v, u).

Se $G = (V, E)$ é um qualquer grafo sem arestas paralelas, E pode ser expresso como um conjunto de pares ordenados, logo $E \subseteq V \times V$ pode ser considerado como uma relação em V. Assim dizemos que o grafo $G = (V, E)$ é řeflexivo, šimétrico, ănti-simétrico, t̆ransitivo, etc., se a relação E o for. Um grafo não dirigido é simétrico. (Porquê?)

Um ğrafo não dirigido pode ser considerado como um grafo dirigido se associarmos a cada aresta não dirigida $\{u, v\}$ duas arestas dirigidas, (u, v) e (v, u).

Se um grafo $G = (V, E)$ é reflexivo, simétrico e transitivo, então a relação E é uma relação de equivalência em V e, portanto, V pode ser particionado em classes de equivalência. Cada uma destas classes de equivalência juntamente com as arestas de E que ligam os seus vértices é um subgrafo de G. G fica assim particionado nestes subgrafos que se dizem čomponentes do grafo. Mais geralmente, pode fazer-se uma tal partição fazendo corresponder a cada grafo simétrico e transitivo o seu fecho reflexivo e as correspondentes classes de equivalência. O grafo da Figura 7 tem três componentes. Estas são também chamadas as componentes conexas (ver póxima secção).

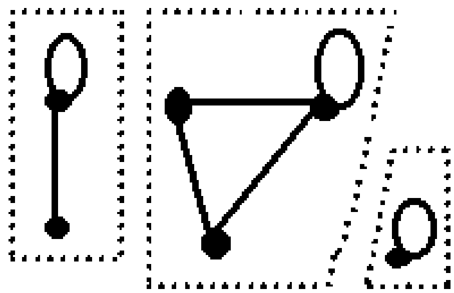


Figura 7: componentes

Ĭsomorfismo de grafos. Dois grafos $G_1 = (V_1, A_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2)$ dizem-se ĭsomorfos se existir uma função bijectiva

$$\phi : V_1 \to V_2$$

tal que para quaisquer dois vértices u e v de V_1 se tem que

$$(u, v) \in A_1 \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in A_2 \quad \text{e} \quad \{u, v\} \in A_1 \Leftrightarrow \{\phi(u), \phi(v)\} \in A_2.$$

A função ϕ satisfazendo estas condições diz-se um isomorfismo de grafos e escrevemos $G_1 \simeq G_2$ para indicar que G_1 e G_2 são isomorfos.

Por outras palavras, ϕ é um isomorfismo entre G_1 e G_2 se $\phi : V_1 \to V_2$ for uma função bijectiva e a correspondência ϕ' dada por

$$(u, v) \mapsto (\phi(u), \phi(v))$$
$$\{u, v\} \mapsto \{\phi(u), \phi(v))\}$$

define também uma função bijectiva $\phi' : A_1 \to A_2$.

Como exemplo, consideremos os dois grafos da Figura 8.

Eles são isomorfos. Com efeito, se definirmos ϕ por

$$\phi(a_1) = b_1,\ \phi(a_2) = b_5,\ \phi(a_3) = b_4,\ \phi(a_4) = b_3,\ \phi(a_5) = b_2,$$

a correspondência ϕ' definida por $\phi'(\{x, y\}) = \{\phi(x), \phi(y)\}$, para cada aresta $\{x, y\}$ do primeiro grafo, é também uma função bijectiva.

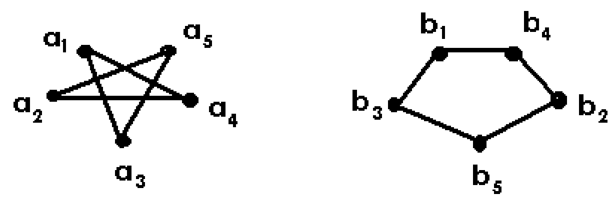


Figura 8: grafos isomorfos

1.1 Exercícios.

1. Desenhe o grafo $G = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$. Determine o conjunto $W = \{i \,|\, i$ é um vértice tal que i e 2 são adjacentes$\}$.

2. Desenhe o grafo dirigido $G = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (5, 1), (5, 3), (4, 1), (4, 4)\}$.

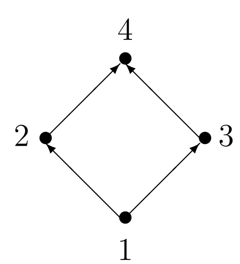
3. Construa um grafo completo com 4 vértices tal que os arcos não se intersectem. Construa um grafo completo com 5 vértices.

4. Desenhe os grafos K_3 e K_6.

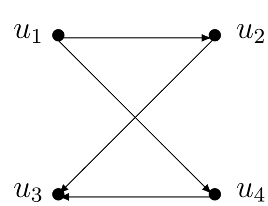
5. Mostre que: (a) um grafo não dirigido (simples) completo com n vértices tem o número máximo de arestas, isto é, $\frac{n(n-1)}{2}$; (b) um digrafo (simples) completo com n vértices tem o número máximo de arestas, isto é, $n(n-1)$.

6. Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que os dois grafos dados são isomorfos.

(a)

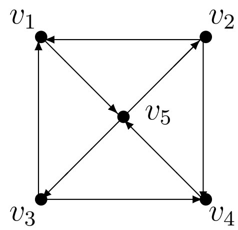


G

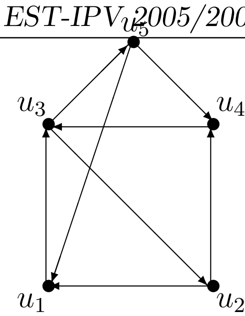


H

(b)



K



L

7. Mostre que o isomorfismo de grafos é uma relação de equivalência na classe de todos os grafos.

   Mostre que todos os grafos pertencentes à mesma classe de equivalência têm o mesmo número de vértices, o mesmo número de arestas e o mesmo número de vértices com um determinado grau. Descubra outras propriedades que sejam invariantes numa mesma classe de equivalência.

8. Desenhe todos os digrafos simples com três vértices, supondo que grafos isomorfos não se distinguem. Mostre que existe apenas

   - um tal digrafo sem arestas;

   - um com uma aresta;

   - quatro com duas arestas;

   - quatro com três arestas,

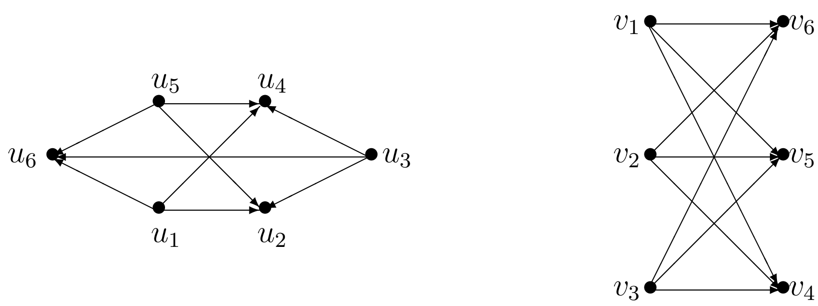
   - quatro com quatro arestas;

   - um com cinco arestas;

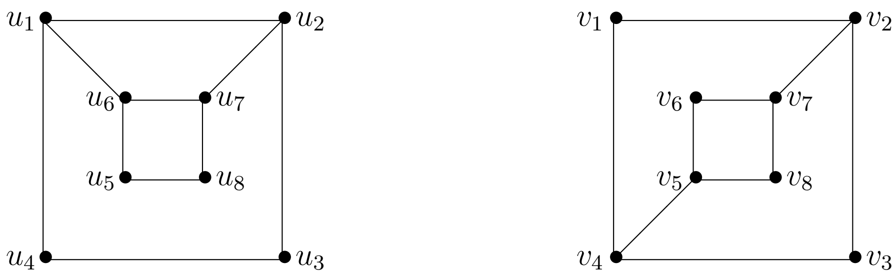
   - um com seis arestas.

   Estabeleça as propriedades desses grafos no que respeita à simetria, transitividade, etc.

9. Mostre que os grafos seguintes são isomorfos.



10. Mostre que os grafos seguintes não são isomorfos.



2 Caminhos, ciclos e conexidade

Seja $G = (V, E)$ um digrafo simples. Um čaminho em G é uma sequência de arestas tal que o vértice terminal de cada aresta é o vértice inicial da aresta seguinte na sequência.

Portanto,

$$< (v_1, v_2),\ (v_2, v_3),\ ...,\ (v_{k-2}, v_{k-1}),\ (v_{k-1}, v_k) >$$

é um caminho, supondo que todos os vértices e arestas que aparecem na sequência pertencem a V e a E, respectivamente. Usualmente representamos um tal caminho por

$$< v_1,\ v_2,\ v_3,\ ...,\ v_{k-2},\ v_{k-1},\ v_k > \ .$$

Claro que nem toda a sequência de vértices é um caminho.

O čaminho trivial de v para v consiste num único vértice, $< v >$.

2.1 Exercícios. Faça o diagrama de um digrafo com cinco vértices e três arestas. Indique uma sequência de vértices que seja um caminho e uma outra que o não seja.

O número de arestas que aparecem num caminho diz-se o čomprimento do caminho. Um caminho num digrafo no qual as arestas são todas distintas diz-se um čaminho simples. Um caminho no qual todos os vértices são distintos diz-se um čaminho elementar.

Relativamente ao digrafo da Figura 9, alguns dos caminhos de 1 para 9 são:

$$P_1 =< 1, 9 >$$
$$P_2 =< 1, 2, 3, 8, 1, 9 >$$
$$P_3 =< 1, 2, 4, 5, 7, 8, 1, 9 >$$

P_1, P_2 e P_3 são todos caminhos simples mas P_2 e P_3 não são elementares.

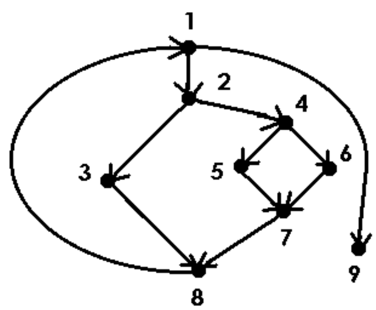


Figura 9: caminhos

Um caminho não trivial da forma

$$< v_1,\, v_2,\, ...,\, v_n,\, v_1 >,$$

que começa e acaba no mesmo vértice, diz-se um čiclo. Um ciclo diz-se šimples se nenhuma aresta do ciclo aparecer mais do que uma vez e diz-se ělementar se não passar por nenhum vértice mais do que uma vez, excepto no inicial e terminal. Um ciclo simples também se diz čircuito.

Aluns ciclos do grafo da Figura 9 são:

$$C_1 =< 1, 2, 3, 8, 1 >$$
$$C_2 =< 1, 2, 4, 5, 7, 8, 1 >$$
$$C_3 =< 1, 2, 3, 8, 1, 2, 3, 8, 1 >$$

Um digrafo simples que não tem ciclos diz-se ăcíclico. A Figura 10 representa grafos acíclicos.

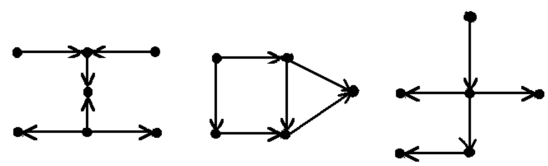


Figura 10: grafos acíclicos

Seja G um digrafo simples. Se u e v são dois vértices de G dizemos que v é *atingível* por u se $v = u$ ou se existir algum caminho de u para v.

Se um vértice v é atingível por um outro vértice u, um caminho de u para v com menor comprimento diz-se um *caminho de comprimento mínimo*. O comprimento dum caminho de comprimento mínimo diz-se a distância de u a v e denota-se por $d(u, v)$. Quando não existe nenhum caminho de u para v costuma escrever-se $d(u, v) = \infty$.

2.2 Exercícios.

1. Verificar que a distância $d(u, v)$ entre dois vértices de um digrafo tem as seguintes propriedades:

$$\begin{array}{l} d(u,u) = 0 \\ d(u,v) \geq 0 \\ d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w) \text{ (desigualdade triangular)} \end{array}$$

   Compare estas propriedades com as propriedades de outras distâncias que já conhece.

2. Dê um exemplo que mostre que

   (a) se pode ter $d(u, v) + d(v, w) > d(u, w)$;

   (b) se pode ter $d(u, v) \neq d(v, u)$.

2.3 Teorema. *Num digrafo simples, o comprimento de cada caminho elementar é menor ou igual a $n - 1$, onde n é o número de vértices do grafo. Analogamente, o comprimento de cada ciclo elementar não excede n.*

Demonstração. A prova baseia-se no facto de que num caminho elementar cada vértice não aparece mais do que uma vez. Assim, o número de vértices distintos num caminho elementar de comprimento k é $k + 1$. Como o grafo só tem n vértices distintos, não é possível arranjar um caminho elementar de comprimento maior do que $n-1$.

Para um ciclo elementar de comprimento k, a sequência dos vértices tem k distintos; pelo que, havendo no grafo não mais do que n vértices distintos, um ciclo elementar não pode exceder n em comprimento.

Até aqui falámos de caminhos e ciclos em grafos dirigidos. Vamos ver como estas noções se estendem a grafos não dirigidos.

As definições de caminho e ciclo e as definições e propriedades relacionadas que estudámos para grafos dirigidos são naturalmente estendidas aos ğrafos não dirigidos.

Por exemplo, num grafo não dirigido simples uma sequência

$$< v_1, v_2, ..., v_d >$$

constitui um caminho se para $i = 2, 3, ..., d$ existir uma aresta $\{v_{i-1}, v_i\}$ (dita aresta do caminho). O comprimento do caminho é dado pelo número de arestas do caminho, ou seja, $d-1$.

Um grafo não dirigido diz-se ăcíclico se não tiver ciclos simples (ou circuitos). Note-se que, ao contrário dos grafos dirigidos, um grafo não dirigido pode ter ciclos sem ter ciclos simples. Com efeito, se contiver a aresta $\{v_1, v_2\}$, então $> v_1, v_2, v_1 >$ é um ciclo que repete uma aresta.

Um grafo não dirigido diz-se čonexo se for não vazio e cada dois vértices do grafo podem ser ligados por um caminho.

A noção de conexidade induz uma partição num grafo não dirigido subdividindo-o em subgrafos. Cada subgrafo se diz uma componente conexa do grafo. A Figura 11 representa um grafo que tem três componentes.

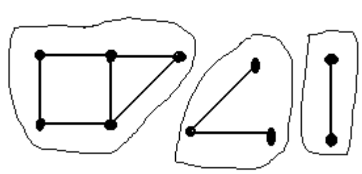


Figura 11: componentes conexas

Dizemos que um digrafo é čonexo (ou f̌racamente conexo) se o grafo não dirigido obtido desse digrafo considerando todas as suas arestas como sendo arestas não dirigidas for conexo. Na Figura 12, o grafo da esquerda é conexo, o da direita é desconexo, i.e., não é conexo.

Figura 12: digrafo conexo e digrafo não conexo

Um digrafo simples não vazio diz-se ŭnilateralmente conexo se para cada par de vértices do grafo pelo menos um dos vértices do par é atingível pelo outro. Se para cada par de vértices cada um dos vértices é atingível pelo outro dizemos que o grafo é f̆ortemente conexo.

2.4 Observação. É imediato que, para digrafos, se tem:

ser fortemente conexo $\Rightarrow$ ser unilateralmente conexo $\Rightarrow$ ser conexo

Relativamente aos digrafos da Figura 13, temos que o primeiro é fortemente conexo, o segundo é fracamente conexo mas não unilateralmente conexo, e o terceiro é unilateralmente conexo sem ser fortemente conexo. (Justifique.) Portanto, as

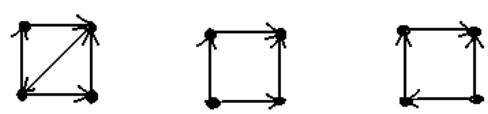


Figura 13: conexidade

implicações recíprocas das apresentadas na Observação acima não são verdadeiras.

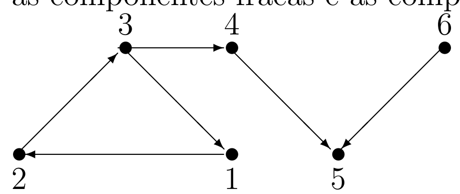
Seja $G = (V, E)$ um digrafo simples e $X \subseteq V$. Um subgrafo cujos vértices são os elementos de X e cujas arestas são as arestas de G que têm os seus vértices inicial e terminal em X diz-se um šubgrafo induzido por X.

Um subgrafo G_1 diz-se m̌aximal relativamente a uma dada propriedade se não existir nenhum outro subgrafo que tenha essa propriedade e contenha G_1.

Para um digrafo simples, um subgrafo fortemente conexo maximal diz-se uma čomponente forte.

Analogamente, um subgrafo unilateralmente conexo (respectivamente, fracamente conexo) maximal diz-se uma č̌omponente unilateral (respectivamente, č̌omponente fraca).

2.5 Exercício. Relativamente ao digrafo representado na figura a seguir, indique as componentes fortes, as componentes fracas e as componentes unilaterais.



2.6 Teorema. *Num digrafo simples $G = (V, E)$, todo o vértice do digrafo pertence a exactamente uma componente forte.*

Demonstração. Seja $v \in V$ e seja S o conjunto de todos os vértices u de G tais que existe um caminho de v para u e existe um caminho de u para v. É claro que $v \in S$ e, por outro lado, é fácil concluir que S é uma componente forte de V. Isto mostra que v pertence a uma componente forte S. Para mostrar que é a única, suponhamos que v pertence a outra componente forte, digamos, R. Mas então, para todo o vértice u de R, existem um caminho de u para v e um caminho de v para u. Isto implica que $u \in S$. Consequentemente, $R \subseteq S$. Mas R é uma componente forte, logo maximal, pelo que tem de ser $R = S$.

2.7 Observação. Pelo teorema anterior concluimos que as componentes fortes determinam uma partição de V. De notar que o mesmo não acontece com as componentes unilaterais (veja o exercício anterior).

2.8 Teorema. *Todo o vértice de um digrafo simples pertence a exactamente uma componente fraca.*

Demonstração. É semelhante à feita para componentes fortes. Fica ficomo exercício.

2.9 Ciclos de Euler.

A figura a seguir esquematiza as pontes de Königsberg. O problema das pontes de Königsberg foi estudado por Euler que apresentou a sua resolução num artigo de 1736. Duas ilhas no rio Pregel em Königsberg, na Rússia, estão ligadas entre si por uma ponte e as ilhas estão ligadas às margens por várias pontes como mostrado

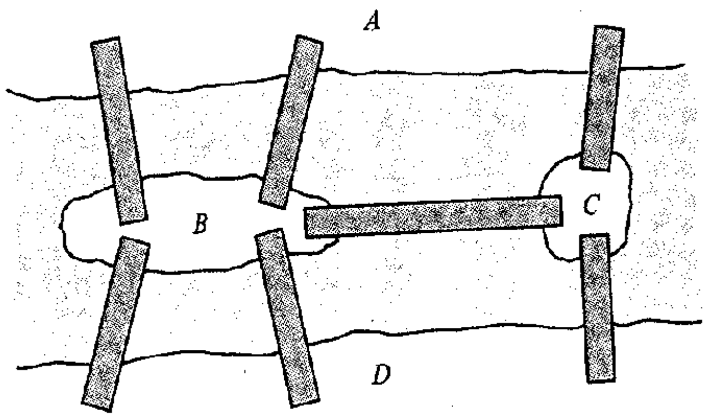


Figura 14: pontes de Königsberg

na Figura 14. O problema consiste em começar num dos pontos A, B, C ou D, caminhar sobre cada uma das pontes exactamente uma vez e acabar no ponto de partida.

Este problema pode formalizar-se do seguinte modo: Determinar se no grafo da Figura 15 existe algum ciclo simples que contenha todas as arestas do grafo.

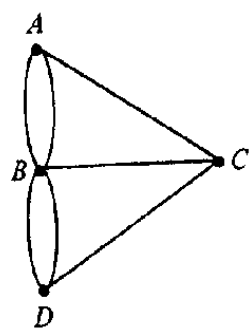


Figura 15: pontes de Königsberg

Um ciclo num grafo G diz-se um ĉiclo de Euler se for simples e contiver todas as arestas e todos os vértices de G.

2.10 Teorema. *Um grafo G tem um ciclo de Euler se e só se for conexo e cada um dos seus vértices tiver grau par.*

2.11 Exercício. Qual é a resposta ao problema das pontes de Königsberg?

2.12 Exemplo do uso de digrafos simples para estudar o estado de utilização de recursos

de um sistema operativo.

Consideremos, num computador:

- o sistema do computador;
- vários programas que partilham os recursos do sistema;
- o sistema operativo.

Se um programa p_1 está a utilizar um recurso r_1, consideramos uma aresta de r_1 para p_1:

$$r_1 \bullet \longrightarrow \bullet\, p_1$$

Se p_1 precisa do recurso r_2, consideramos uma aresta de p_1 para r_2:

$$p_1 \bullet \longrightarrow \bullet\, r_2$$

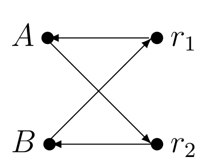
Podemos interpretar esta última aresta como o pedido do recurso r_2 pelo programa p_1.

Supõe-se que todos os pedidos de um recurso têm de ser satisfeitos para que possa ser completada a execução do programa. Se houver algum recurso indisponível o programa tem o controlo dos disponíveis mas tem de esperar pelo indisponível.

Num instante t, podemos considerar:

- o conjunto P_t dos programas em funcionamento no instante t;
- o conjunto R_t dos recursos;
- o grafo de ocupação G_t que representa o estado de ocupação dos recursos no instante t.

Se um programa A tem o control do recurso r_1 e requer o recurso r_2 mas o programa B tem o control de r_2 e requer r_1, como representado pelo grafo



o computador fica num estado de impasse. Temos um ciclo.

Por exemplo, sejam

$$R_t = \{r_1, r_2, r_3, r_4\} \quad \text{e} \quad P_t = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

e suponhamos que o estado de ocupação no instante t é o seguinte:

p_1 tem o recurso r_4 e requer r_1
p_2 tem o recurso r_1 e requer r_2 e r_3
p_3 tem o recurso r_2 e requer r_3
p_4 tem o recurso r_3 e requer r_1 e r_4

Então o grafo de ocupação no instante t é o representado na Figura 16.

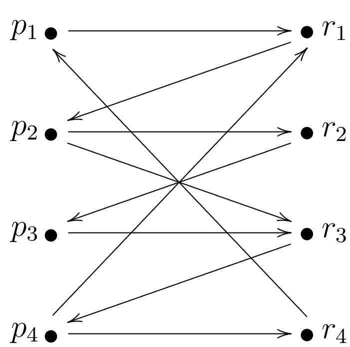
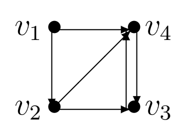


Figura 16: grafo do estado de ocupação dos recursos

Ocorre algum impasse? Por outras palavras, o grafo tem ciclos?

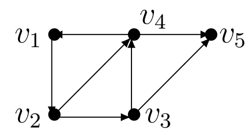
2.13 Exercícios.

1. Indique três caminhos elementares distintos de v_1 para v_3 no digrafo



Qual a distância entre v_1 e v_3? Existe algum ciclo no grafo? O digrafo é transitivo?

2. Determine os graus fora e graus dentro dos vértices do grafo



Indique todos os seus ciclos elementares. A partir dele obtenha um digrafo acíclico removendo um dos seus arcos. Faça uma listagem de todos os vértices que podem atingir todos os outros no digrafo dado.

3. Dado um digrafo simples $G = (V, A)$ em que condições é que a equação

$$d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) = d(v_1, v_3)$$

é satisfeita por v_1, v_2, v_3 de V.

4. Para cada um dos digrafos dos exercícios 1 e 2, determine se são fortemente, fracamente ou unilateralmente conexos.

5. Mostre que um digrafo simples G é fortemente conexo se e só se existir um ciclo em G que inclui cada vértice pelo menos uma vez.

6. O diâmetro de um digrafo simples $G = (V, A)$ é dado por δ, onde $\delta = \max_{u,v \in V} d(u, v)$. Determine o diâmetro do digrafo dos exercício 2.

7. Determine as componentes fortes do digrafo do exercício 2. Determine também as suas componentes unilaterais e fracas.

8. Mostre que todo o vértice e todo o arco de um grafo estão contidos em exactamente uma componente fraca.

9. Para cada um dos grafos dados, represente-o por um diagrama e diga se tem um ciclo de Euler, indicando-o no caso afirmativo.

   (a) $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $E = \{\{a, a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, g\}, \{c, g\}, \{g, f\}, \{f, d\}, \{d, e\}\}$

   (b) $G = (V, E)$, onde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$

(c) $G = (V, E)$, onde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$

(d) $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$

3 Representação matricial de grafos

Seja $G = (V, E)$ um digrafo simples no qual $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e os vértices se supõem ordenados de v_1 a v_n. A matriz A $n \times n$ de elementos a_{ij} dados por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{se } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

diz-se a m̌atriz das adjacências do grafo G.

3.1 Observações.

1. A matriz de adjacências de $G = (V, E)$ é a matriz da relação E em V.

2. Recorde que toda a matriz cujos elementos são 0 e 1 ("falso"ou "verdadeiro") se diz uma *matriz booleana* ou *matriz bit*.

3. O número de elementos iguais a 1 na linha i da matriz de adjacências é igual ao grau fora de v_i e o número de elementos iguais a 1 na coluna j é igual ao grau dentro de v_j.

3.2 Exemplo. O grafo da Figura 17, onde os vértices se consideram ordenados

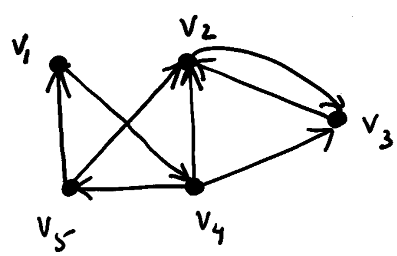


Figura 17: digrafo

por $v_1, v_2, ..., v_5$, tem como matriz adjacente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Algumas propriedades de um grafo são imediatamente vistas através da sua matriz de adjacências. É o caso por exemplo da reflexividade e da simetria (Justifique).

Consideremos agora as potências da matriz de adjacências. Denotemos por $a_{ij}^{[2]}$ o elemento na posição ij da matriz A^2, sendo A a matriz de adjacências do exemplo anterior. Temos então

$$a_{ij}^{[2]} = \sum_{k=1}^{5} a_{ik} a_{kj}$$

Fazendo as contas, obtém-se

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideremoa a quarta linha de A. Os elementos não nulos são a_{42}, a_{43} e a_{45}, significando que (v_4, v_2), (v_4, v_3) e (v_4, v_5) são arestas do grafo. Ao multiplicar A por A, quando multiplicamos a quarta linha pela coluna j, temos a soma

$$a_{41}a_{1j} + a_{42}a_{2j} + a_{43}a_{3j} + a_{44}a_{4j} + a_{45}a_{5j}$$

onde cada uma das parcelas vai ser 1 ou 0. Por exemplo, seja $j = 2$; fica

$$[0\ 1\ 1\ 0\ 1][0\ 0\ 1\ \ 1\ 1]^t = 0 + 0 + 1 + 0 + 1\,.$$

O 1 na terceira parcela aparece porque temos

$$v_4 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_2$$

e o 1 da última parcela vem porque temos

$$v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_2\,.$$

Cada 1 corresponde a um caminho de v_4 para v_2 de comprimento 2. Somando os dois 1's obtemos 2 que é o elemento $a_{42}^{[2]}$ e que é , portanto, o número de caminhos de comprimento 2 que temos de v_4 para v_2. De um modo geral, é válida a propriedade seguinte.

3.3 Teorema. *Seja A a matriz de adjacências de um digrafo G. O elemento da linha i e coluna j de A^n, $n \geq 0$, é igual ao número de caminhos de comprimento n do i-ésimo vértice para o j-ésimo vértice.*

Demonstração. Por indução sobre n. (Exercício)

Atendendo ao teorema anterior, se $G = (V, E)$ é um grafo e A é a matriz de adjacências, então, para um dado inteiro positivo r, a matriz

$$B_r = A^0 + A + A^2 + ... + A^r$$

permite determinar quantos caminhos de comprimento menor ou igual a r existem de um vértice v_i para um vértice v_j.

Recorde que num digrafo simples com n vértices o comprimento de um caminho ou ciclo elementar não excede n (Teorema 1 da Secção 2). Por outro lado, todo o caminho pode ser transformado num caminho elementar eliminando todos os ciclos do caminho e, de forma análoga, todo o ciclo pode ser transformado num ciclo elementar. Assim, para determinar se existe algum caminho de v_i para v_j, precisamos apenas de averiguar se existem caminhos de comprimento menor ou igual a $n-1$. Se $v_i = v_j$ um caminho de v_i para v_j é um ciclo e neste caso temos apenas de averiguar os ciclos de comprimento menor ou igual a n. Portanto, sendo G um grafo de n vértices, todos os caminhos ou ciclos elementares são contados pela matriz

$$B_n =^0 + A + A^2 + ... + A^n \,.$$

Esta matriz permite portanto, dados dois vértices u e v, determinar se v é ou não atingível por u. (Justifique.)

A matriz de adjacências de um grafo não dirigido define-se de forma análoga. Ela é sempre uma matriz simétrica. (Porquê?)

Vamos agora definir outro tipo de matriz associada a um grafo.

Seja $G = (V, E)$ um digrafo simples tal que $|V| = n$ e os vértices de G, v_1, v_2, ..., v_n, se supôem ordenados por esta ordem. A matriz P $n \times n$ cujos elementos são dados por

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe um caminho de } v_i \text{ para } v_j \\ 0, & \text{se tal caminho não existe} \end{cases}$$

diz-se a ṁatriz dos caminhos do grafo G.

A matriz dos caminhos pode ser calculada a partir da matriz $B_n = (b_{ij})$ (como definida atrás) pondo $p_{ij} = \text{sg} b_{ij}$, onde sg é a função sinal.

Se designarmos por $A^{(n)}$ a potência de ordem n de A relativamente ao produto booleano de matrizes, como já foi feito quando trabalhámos com matrizes de relações, temos que

$$P = A^{(0)} \vee A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee ... \vee A^{(n)} = \bigvee_{i=0}^{n} A^{(k)} .$$

3.4 Exercícios.

1. Considere o grafo $G = (V, A)$, com $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, onde $a = \{1, 2\}, b = \{2, 3\}, c = \{3, 5\}, d = \{2, 5\}, e = \{2, 4\}, f = \{4, 5\}, g = \{1, 4\}, h = \{1, 5\}$. Determine:

   (a) A matriz de adjacências de G.

   (b) O grau de cada vértice.

   (c) A matriz dos caminhos de G.

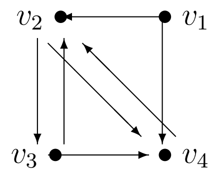
2. Um grafo G onde todos os vértices têm grau r designa-se por grafo *regular* de grau r.

   (a) Construa um grafo regular de grau 1 que não seja completo.

   (b) Construa um grafo regular de grau 2 que não seja completo.

   (c) Supondo que G é um grafo regular de grau r com n vértices, determine o número de arcos de G.

3. Determine a matriz de adjacências A do digrafo seguinte. Determine os caminhos de comprimento 1 e 2 de v_1 para v_4. Mostre que existe pelo menos um caminho simples de comprimento 4 de v_1 para v_4. Calcule A^2, A^3 e A^4 e comente os resultados anteriores, relacionando-os com as matrizes obtidas.



4. Mostre que a soma dos elementos da diagonal da segunda potência de uma matriz de adjacências de um grafo não dirigido G é o dobro do número de arcos de G.

5. Desenhe o grafo não dirigido cuja matriz de adjacências A verifica:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

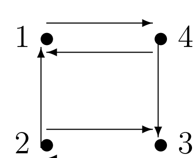
6. Mostre que toda a matriz booleana A verifica a igualdade

$$(I \vee A)^{(2)} = (I \vee A) \odot (I \vee A) = I \vee A \vee A^{(2)}$$

onde I é a matriz identidade e $A^{(2)} = A \odot A$. Mostre também que, para todo o inteiro positivo r,

$$(I \vee A)^{(r)} = I \vee A \vee A^{(2)} \vee ... \vee A^{(r)} .$$

7. Relativamente ao grafo



   (a) Determine a matriz de adjacências A.

   (b) Obtenha a matriz de caminhos a partir de A.

8. Para um digrafo simples $G = (V, E)$, com $card(V) = n$, cuja matriz de adjacências é denotada por A, a sua *matriz de distâncias* é dada por

$$\begin{array}{ll} d_{ij} = \infty & \text{se } a_{ij}^(k) \notin A^{(k)},\ k = 0, 1, ..., n \\ d_{ii} = 0 & \text{para todo } i = 1, 2, ..., n \\ d_{ij} = k & \text{onde } k \text{ é o menor inteiro para o qual } a_{ij}^{(k)} \neq 0 \end{array}$$

   Determine a matriz de distâncias do digrafo do exercício 3. O que significa $d_{ij} = 1$?

9. Mostre que um digrafo G é fortemente conexo se todas as entradas da matriz das distâncias são diferentes de ∞. Como se pode obter a matriz dos caminhos a partir da matriz das distâncias? Como se modificam as entradas da diagonal?

4 Árvores

Existem duas grandes classes de árvores: ˘árvores livres e ˘árvores com raiz. Uma árvore com raiz é um caso especial de grafo dirigido. As árvores binárias (com raiz) foram já estudadas.

Uma árvore livre, ou apenas ˘árvore é um grafo não dirigido simples, conexo e acíclico. Uma árvore tem de ter pelo menos um vértice (visto ser um grafo conexo). Na Figura 18 estão representadas algumas árvores.

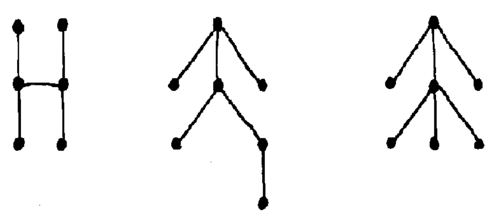


Figura 18: árvores

4.1 Teorema. *Uma árvore com n vértices tem $n - 1$ arestas.*

Demonstração. Por indução sobre n. Para $n = 1$, é claro que a árvore tem 0 arestas.

Suponhamos a propriedade válida para n e provemos que se verifica para $n + 1$. Numa árvore de $n + 1$ vértices consideremos um caminho acíclico $< v_1, v_2, ..., v_m >$

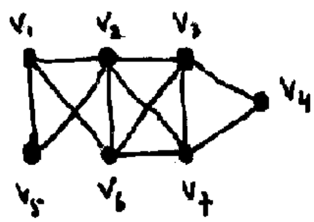
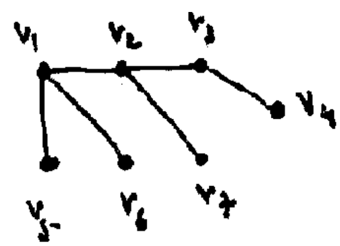
com os vértices todos diferentes e tal que não existe nenhum caminho do grafo que contenha este estritamente. Então os vértices v_1 e v_m têm ambos grau igual a um. (Porquê?) Tiremos do grafo o vértice v_1 e a aresta incidente em v_1. Obtemos assim um grafo de n vértices que, por hipótese indutiva, tem $n-1$ arestas. Consequentemente, o grafo inicial que se obtém deste juntando-lhe v_1 e a aresta que lhe era incidente, tem n arestas.

Uma árvore ăbrangente de um grafo não dirigido conexo $G = (V, A)$ é uma árvore livre cujo conjunto de vértices é V e que é um subgrafo de G.

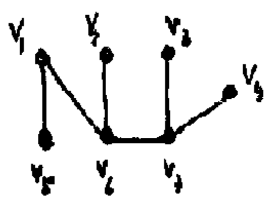
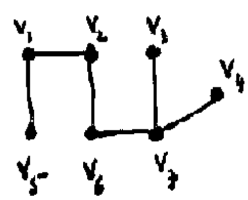
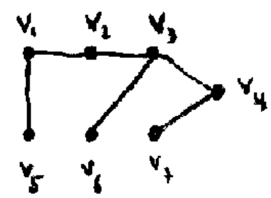
T̆écnicas para gerar uma árvore abrangente de um dado grafo:

1. Tirar arestas que pertencem a ciclos, uma a uma até o grafo não ter ciclos simples.

   Exemplo: Uma árvore abrangente para o grafo é a seguinte:

   Outras árvores abrangentes geradas pelo mesmo grafo:

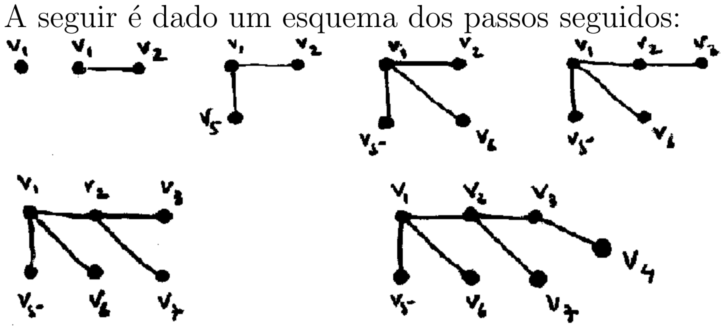
2. Escolher uma sequência de $n-1$ arestas, uma a uma, de tal modo que em cada passo o subgrafo obtido é acíclico (supondo que o grafo tem n vértices).

   Ĕxemplo: Consideremos o grafo do exemplo anterior. Vamos primeiro escrever uma l̆ista de adjacências, i.e., uma lista que para cada vértice indica os vértices que lhe estão ligados por meio de uma aresta:

$$
\begin{array}{l}
v_1 : v_2,\, v_5,\, v_6 \\
v_2 : v_1,\, v_3,\, v_5,\, v_6,\, v_7 \\
v_3 : v_2,\, v_4,\, v_6,\, v_7 \\
v_4 : v_3,\, v_7 \\
v_5 : v_1,\, v_2 \\
v_6 : v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_7 \\
v_7 : v_2,\, v_3,\, v_4,\, v_6
\end{array}
$$

Para gerar uma árvore abrangente, comecemos pelo vértice v_1. Os vértices aos quais v_1 se liga são v_2, v_5, v_6. Temos então as arestas $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_5\}$ e $\{v_1, v_6\}$. Várias escolhas poderíamos fazer agora: podíamos partir de v_2, v_5 ou v_6. Escolhemos a ordem dos índices das letras que designam os vértices. Portanto, escolhemos v_2 e, das arestas ligadas a v_2, escolhemos $\{v_2, v_3\}$ e $\{v_2, v_7\}$, pois com todas as outras obterííamos ciclos. Passamos a v_3 e seleccionamos apenas $\{v_3, v_4\}$, pois todas as outras escolhas formariam ciclos. Neste momento, temos já uma árvore abrangente do grafo.

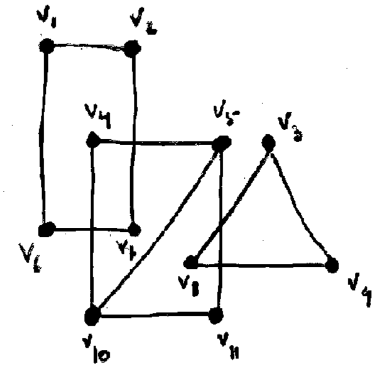
A seguir é dado um esquema dos passos seguidos:



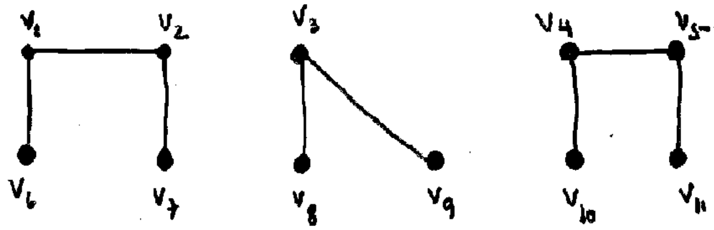
Uma floresta é um grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, sendo os V_i's disjuntos dois a dois, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ sendo os A_i's disjuntos dois a dois, e, para cada $i \in I$, $G_i = (V_i, A_i)$ é uma árvore.

Dado um grafo não conexo, em vez de gerarmos uma árvore abrangente para esse grafo, geramos uma floresta. Assim, uma floresta abrangente de um grafo não dirigido é a floresta obtida substituindo cada uma das componentes conexas por uma árvore abrangente dessa componente.

4.2 Exemplo. Dado o grafo



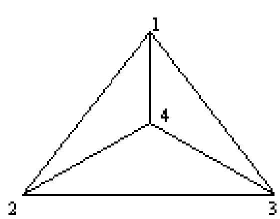
uma sua floresta abrangente é

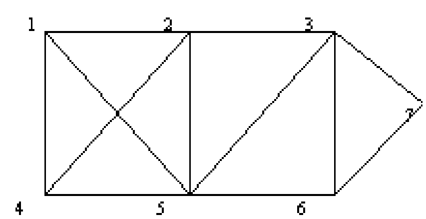


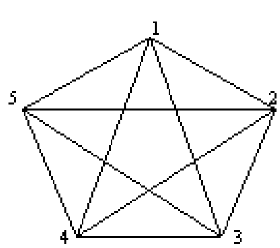
4.3 Exercícios.

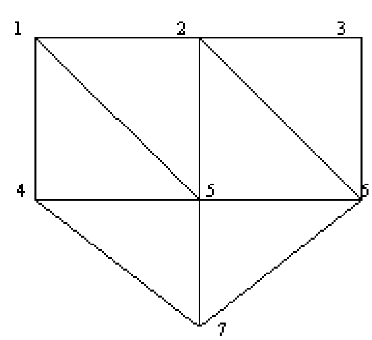
1. Determine todas as árvores livres distintas com dois, três e quatro vértices.

2. Determine uma árvore abrangente para cada um dos grafos seguintes, removendo sucessivamente arestas de ciclos simples.



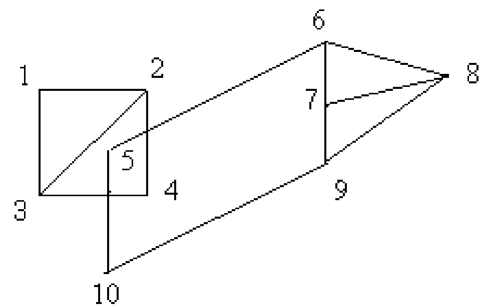






3. O mesmo que no exercício anterior por um processo diferente, nomeadamente, escolhendo uma sequência com um número conveniente de arestas, onde as arestas são tomadas uma a uma, de tal modo que o subgrafo que se obtém em cada passo é acíclico. Desenhe uma sequência de grafos que ilustre o procedimento seguido.

4. Determine uma floresta abrangente para o grafo.



5 Grafos com pesos

Um ğrafo com pesos é um grafo que tem um peso, i.e., um número, associado a cada aresta. A Figura 19 representa um grafo com pesos. O peso da aresta $\{a, b\}$

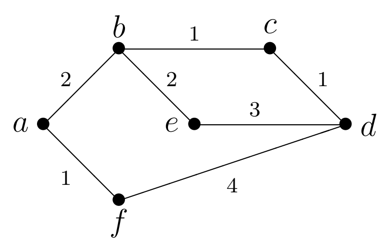


Figura 19: grafo com pesos

é $p(\{a, b\}) = 2$, o peso da aresta $\{b, c\}$ é $p(\{b, c\}) = 1$, etc.

Num grafo com pesos, dado um caminho

$$C = \{\{v_0, v_1\},\ \{v_1, v_2\},\ ...,\ \{v_{k-1}, v_k\}\}$$

de v_0 para v_k, o čomprimento do caminho, também chamado p̌eso do caminho, é a soma dos pesos das arestas que o constituem. Assim o comprimento de C é

$$p(C) = p(\{v_0, v_1\}) + p(\{v_1, v_2\}) + ... + p(\{v_{k-1}, v_k\})\,.$$

Neste contexto, um caminho mais curto de v_0 para v_k é um caminho de peso mínimo; a distância de v_0 a v_k é o peso dum caminho mais curto. Por exemplo, no grafo da Figura 19 o caminho mais curto de c para e é $< c, b, e >$ e o seu peso é 1+2=3; portanto, a distância de c a e é 3.

5.1 Algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho mais curto entre dois vértices de um grafo com pesos.

Consideremos ainda o grafo da Figura 19. É claro que é fácil determinar a distância entre a e d. Uma observação atenta do grafo leva à conclusão de que um caminho mais curto é $< a, b, c, d >$ e que a distância é igual a 4. Mas em problemas da vida real podemos ter grafos com pesos com um número muito grande de vértices e arestas, o que dificulta a determinação das distâncias. Existem vários algoritmos para o cálculo da distância entre dois vértices, vamos aqui debruçar-nos sobre um deles, o algoritmo de Dijkstra.

Antes de descrever o algoritmo, vamos ilustrá-lo com o cálculo da distância de a a d no grafo da Figura 19. Simultâneamente pode ir verificando na Tabela 20 o método que vamos seguindo.

Vamos proceder do seguinte modo: Partimos de a e vamos juntando passo a passo outros vértices a a, e arestas, até chegar a d. Em cada passo, temos um certo sugrafo do grafo dado, constituído por esses vértices e arestas. Tal subgrafo é construído de forma que ele nos dá um caminho mais curto (no grafo inicial) de a a cada um dos vértices do subgrafo. Vamos utilizar uma função L tal que:

inicialmente $L(a) = 0$ e $L(x) = \infty$ para todos os $x \neq a$;
a seguir, para cada vértice seleccionado y, temos

$$L(x) := \min\{L(x),\ L(y) + p(y, x)\}$$

onde

$$p(y, x) = p(\{y, x\}).$$

Após o passo em que juntamos o vértice d, obtemos $L(d)$ que nos dá a distância de a a d.

Partimos então de

$$a$$

Um caminho a começar em a tem de passar por b e f visto estes serem os vértices adjacentes a a. Agora

$$L(b) = L(a) + p(a, b) = 2 \;\text{ e }\; L(f) = L(a) + p(a, f) = 1$$

Como

$$1 < 2$$

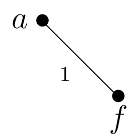
escolhemos

$$f$$

e a aresta

$$\{a, f\}.$$

O sugrafo obtido é



Um caminho que contenha esta como primeira aresta e continue a juntar arestas distintas passa a seguir por d. Temos que, indo de a a d deste modo, o comprimento do caminho percorrido é

$$L(d) = L(f) + p(f, d) = 1 + 4 = 5$$

Mas, dentro dos vértices x ainda não seleccionados, o valor mínimo de $L(x)$ ´´e atingido por

$$L(b) = 2$$

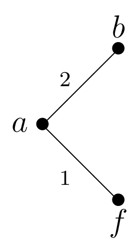
Então retomamos o caminho que passa por b, e que tinhamos abandonado temporariamente. Ou seja, é então agora altura de seleccionar o vértice

$$b$$

e a aresta

$$\{a, b\}$$

Obtemos então o subgrafo



Continuando, os vértices que ainda não foram seleccionados e são adjacentes a b são c e e. E temos

$$L(c) = L(b) + p(b, c) = 2 + 1 = 3 \text{ e } L(e) = L(b) + p(b, e) = 2 + 2 = 4$$

Como

$$3 < 4,\ 5$$

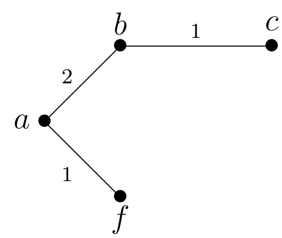
seleccionamos o vértice

$$c$$

e a aresta

$$\{b, c\}$$

O subgrafo resultante é:



Neste momento, de entre os vértices ainda não seleccionados, o único adjacente a c é o vértice d, e tem-se

$$L(d) := \min\{L(d), L(c) + p(c, d)\} = 4$$

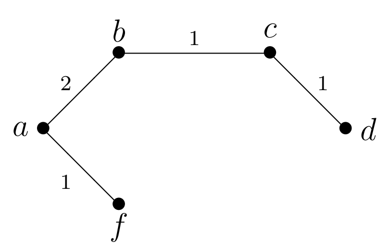
Como

$$4 \leq 4, 5$$

podemos seleccionar

$$d \text{ e } \{c, d\}$$

(também se podia seleccionar e e $\{b, e\}$, visto que $L(e) = L(b) + p(b, e)$ também é igual a 4.) Obtemos o subgrafo



Este sugrafo (que é uma árvore), dá-nos, para cada um dos seus vértices x, um caminho mais curto de a para x no grafo inicial. Em particular,

$$< a, b, c, d > \text{ é um caminho mais curto de } a \text{ para } d \text{ e } d(a, b) = 4.$$

O procedimento acabado de seguir para encontrar a distância de a a d chama-se algoritmo de Djkstra. Ilustramos os passos acabados de descrever na tabela seguinte, onde, em cada passo, S designa o conjunto dos vértices do subgrafo obtido, e R designa o conjunto das arestas desse subgrafo. Em cada linha vamos adicionando elementos a S e R.

S	R	$L(x), x \notin S$
$\emptyset$	$\emptyset$	$L(a) := 0$, $L(x) := \infty$, $x \neq A$
a	$\emptyset$	$L(b) := 2$, $L(f) = 1$, $L(x) := \infty, x \neq b, f$
f	$\{a, f\}$	$L(d) := L(f) + p(f, d) = 5$,
b	$\{a, b\}$	$L(c) := L(b) + p(b, c) = 3$, $L(e) := L(b) + p(b, e) = 4$
c	$\{b, c\}$	$L(d) := \min\{L(d),\, L(c) + p(c, d)\} = 4$
d	$\{c, d\}$	$L(d) = d(a, d) = 4$

Figura 20: Tabela 1

No que se segue, dados quaisquer dois vértices de um grafo com pesos, usamos a expressão $p(u, v)$ com o seguinte significado:

$$p(u, v) = \begin{cases} \text{peso da aresta } \{u, v\}, & \text{se ela pertence ao grafo} \\ \infty, & \text{se } \{u, v\} \text{ não pertence ao grafo} \end{cases}$$

Descreve-se a seguir o algoritmo de Dijkstra, acabado de exemplificar, para determinar a distância e um caminho mais curto entre os vértices a e z de um grafo com pesos:

1. $L(a) := 0$
2. $L(x) := \infty$, $x \neq a$
3. $S := \emptyset$

$3'$. $R := \emptyset$

4. Se $z \in S$, vai-se para 9.; se $z \notin S$, continua-se em 5.
5. Escolhe-se um vértice v tal que $L(v) = \min_{x \notin S} L(x)$
6. $S := S \cup \{v\}$

$6'$. $R := R \cup \{$última aresta usada para a realização do peso mínimo $p\{u, v\}\}$

7. $L(x) := \min\{L(x), L(v) + p(v, x)\}$ para todo o vértice x
8. Vai para 4.
9. $L(z) =$ distância de a a z

Note que (S,R) é uma árvore com pesos que dá um caminho mais curto de a para cada um dos vértices da árvore.

A seguir vamos demonstrar que o algoritmo de Dijkstra calcula a distãncia de a a z. Mais do que isso, em cada passo 4 do algoritmo de Dijkstra, $L(v)$ é o comprimento de um caminho mais curto de a a v.

5.2 Teorema. *O algoritmo de Dijkstra determina o comprimento de um caminho mais curto entre dois vértices de um grafo com pesos.*

Demonstração. Sejam a e z dois vértices de um grafo com pesos. Vamos provar por indução sobre i que $P(i)$:=(na i-ésima vez que chegamos ao passo 4 do algoritmo de Dijkstra, $L(v)$ é o comprimento de um caminho mais curto de a a v).

Base indutiva: Na primeira vez que se chega ao passo 4, escolhe-se a e $L(a) = 0$. Logo $L(a)$ é igual ao comprimento dum caminho mais curto de a a a.

Hipótese indutiva: A propriedade $P(k)$ verifica-se para todo o $k < i$.

Passo indutivo: Suponhamos que estamos no passo 4 pela k-ésima vez e escolhemos $v \notin S$ tal que o valor de $L(v)$ é mínimo.

No que se segue quando nos referirmos a $L(v)$ estamos a considerar o valor de $L(v)$ na k-ésima vez que passamos no passo 4. Primeiro mostramos que, se existir um caminho de a para um vértice w cujo comprimento é menor do que o valor de $L(v)$, então $w \in S$ (i.e., w foi seleccionado na i-ésima vez que passamos no passo 4, para algum $i < k$). Seja P um caminho de a para w de comprimento menor do que $L(v)$. Suponhamos, por contradição, que $w \notin S$. Seja x o vértice mais próximo de a em P que não pertence a S, e seja u o predecessor de x em P. Então $u \in S$, pelo que u foi escolhido no passo 4 durante uma iteração anterior. Mas por hipótese indutiva $L(u)$ é o comprimento dum caminho mais curto de a para u. Temos então que

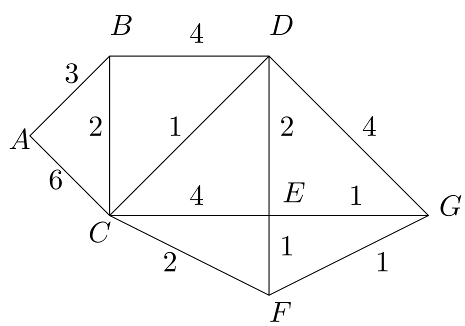
$$L(x) \leq L(u) + p(u, x) \leq \text{comprimento de } P < L(v)\,.$$

Mas esta desigualdade mostra que, ao chegar pela k-ésima vez ao passo 4, v não é o vértice fora de S com valor mínimo para $L(v)$ ($L(x)$ é menor). Esta contradição mostra que w tem de pertencer a S.

Em particular, acabámos de mostrar que se existisse um caminho de a para v de comprimento menor do que $L(v)$, v teria sido já seleccionado no passo 4 (antes da k-ésima passagem) e incluído em S. Consequentemente, todo o caminho de a para v tem comprimento maior ou igual a $L(v)$. Por construção, existe um caminho de a para v de comprimento $L(v)$, logo este é um caminho mais curto de a para v. Fica assim completa a prova.

Se além da distância, pretendemos a árvore correspondente a um caminho mais curto de a para z, podemos juntar ao algoritmo a construção dessa árvore T, onde os vértices de T são os elementos de S e as arestas são aquelas cujo peso entra no cálculo do mínimo referido no passo 4. No exemplo a seguir introduzem-se os passos $3'$ e $5'$ onde se constrói o conjunto R constituído pelas arestas de T:

5.3 Exemplo. Uso do algoritmo de Dijkstra para encontrar a distância e um caminho óptimo entre os vértices A e G do grafo da figura



(Vão tomar-se os vértices por ordem alfabética; assim, quando L(v) toma o valor mínimo para mais do que um vértice, escolhe-se o que fica em primeiro lugar no alfabeto.)

A descrição da aplicação do algoritmo a seguir apresentada é disposta num quadro no final (ver Figura 5.3.

1. $L(A) := 0$
2. $L(X) := \infty$, $X \neq A$
3. $S := \emptyset$

$3'$. $R := \emptyset$

4. $L(A) = \min_{X \in S} L(X)$
5. $S := S \cup \{A\} = \{A\}$

5′. $R := R \cup \emptyset = \emptyset$

6. $G \notin S$

7. $L(X) := \min\{L(X), L(A) + p(A, X)\}$; logo $L(B) = \min\{\infty,\ 3\} = 3$, $L(C) = \min\{\infty,\ 6\} = 6$, $L(X) = \infty$ para $X \neq A, B, C$

4. $L(B) = \min_{X \in S} L(X) = 3$

5. $S := S \cup \{B\} = \{A, B\}$

5′. $R := R \cup \{\{A, B\}\} = \{\{A, B\}\}$

6. $G \notin S$

7. $L(X) := \min\{L(X), L(B)+p(B, X)\}$; logo $L(C) = \min\{6, 3+2\} = 5$, $L(D) = \min\{\infty, 3 + 4\} = 7$, $L(X) = \infty$ para $X \neq A, B, C, D$

4. $L(C) = \min_{X \in S} L(X) = L(B) + p(B, C) = 5$

5. $S := S \cup \{C\} = \{A, B, C\}$

5′. $R := R \cup \{\{B, C\}\} = \{\{A, B\}, \{B, C\}\}$

6. $G \notin S$

7. $L(X) := \min\{L(X), L(C) + p(C, X)\}$; logo $L(D) = \min\{7, 5 + 1\} = L(C) + p(C, D) = 6$, $L(E) = \min\{\infty, 5 + 4\} = 9$, $L(F) = \min\{\infty, 5 + 2\} = 7$, $L(G) = \infty$

4. $L(D) = \min_{X \in S} L(X) = L(C) + p(C, D) = 6$

5. $S := S \cup \{D\} = \{A, B, C, D\}$

5′. $R := R \cup \{\{C, D\}\} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}\}$

6. $G \notin S$

7. $L(X) := \min\{L(X), L(D)+p(D, X)\}$; logo $L(G) = \min\{\infty, 10\} = 10$, $L(E) = \min\{9, 6 + 2\} = 8$ e $L(F) = 7 = L(C) + p(C, F)$

4. $L(F) = \min_{X \in S} L(X) = L(C) + p(C, F) = 7$

5. $S := S \cup \{F\} = \{A, B, C, D, F\}$

5′. $R := R \cup \{\{C, F\}\} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{C, F\}\}$

6. $G \notin S$

7. $L(X) := \min\{L(X), L(F) + p(F, X)\}$; logo $L(G) := \min\{10, 7 + 1\} = 8$ e $L(E) := \min\{8, 7 + 1\} = 8 = L(D) + p(D, E)$

4. $L(E) = \min_{X \notin S} L(X) = 8 = L(D) + p(D, E)$

5. $S := S \cup \{E\} = \{A, B, C, D, E, F\}$

5′. $R := R \cup \{\{D, F\}\} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{C, F\}, \{D, E\}\}$

6. $G \notin S$

7. $L(X) := \min\{L(X), L(E) + p(E, X)\}$; logo $L(G) = \min\{8, 8 + 1\} = 8 = L(F) + p(F, G)$

4. $L(G) = \min_{X \notin S} L(X) = L(F) + p(F, G) = 8$

5. $S := S \cup \{G\} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$

5′. $R := R \cup \{\{F, G\}\} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{C, F\}, \{F, E\}, \{F, G\}\}$

6. $G \in S$

9. $L(G)$=distância de A a G.

A árvore $T = (S, R) = (\{A, B, C, D, E, F, G\},\ \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{C, F\}, \{D, E\}, \{F, G\}\})$ dá um caminho mais curto no grafo dado de A para cada um dos vértices pertencentes à árvore. Assim um caminho mais curto de A a G é $< A, B, C, F, G >$.

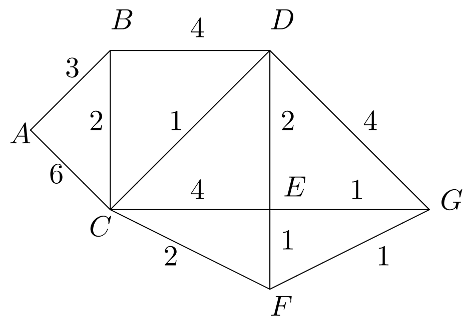
O desenvolvimento do algoritmo feito para este exemplo pode ser exposto num quadro como ilustrado a seguir:

S	R	$L(X), X \notin S$
$\emptyset$	$\emptyset$	$L(A) = 0,\ L(X) = \infty,\ X \neq A$
A	$\emptyset$	$L(B) = 3,\ L(C) = 6,$ $L(X) = \infty, X \neq B, C$
B	$\{A, B\}$	$L(C) = L(B) + p(B, C) = 5,$ $L(D) = L(B) + p(B, D) = 7,$ $L(X) = \infty, X \neq C, D$
C	$\{B, C\}$	$L(D) = L(C) + p(C, D) = 6,$ $L(E) = L(C) + p(C, E) = 9,$ $L(F) = L(C) + p(C, F) = 7,$ $L(G) = \infty$
D	$\{C, D\}$	$L(E) = L(D) + p(D, E) = 8,$ $L(F) = L(C) + p(C, F) = 7,$ $L(G) = L(D) + p(D, G) = 10$
F	$\{C, F\}$	$L(E) = L(D) + p(D, E) = 8$ $L(G) = L(F) + p(F, G) = 8$
E	$\{D, E\}$	$L(G) = L(F) + p(F, G) = 8$
G	$\{F, G\}$	$L(G) = 8 = d(A, G)$

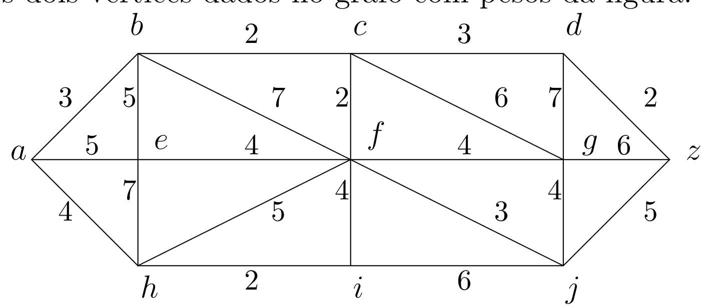
5.4 Exercícios.

1. Use o algoritmo de Dijkstra para encontrar a distância entre os vértices A e H do grafo com pesos $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A}, p)$ onde $\mathcal{V} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, $\mathcal{A} = \{\{A, B\}, \{A, F\}, \{B, C\},$ $\{B, E\}, \{B, D\}, \{C, E\}, \{C, H\}, \{D, E\}, \{D, F\}, \{E, G\}, \{F, G\}, \{G, H\}\}$ e os pesos das arestas são $p(\{A, B\}) = 2$, $p(\{A, F\} = 1$, $p(\{B, C\}) = 2$, $p(\{B, E\} = 4$, $p(\{B, D\}) = 4$, $p(\{C, E\}) = 3$, $p(\{C, H\}) = 1$, $p(\{D, E\}) = 4$, $p(\{D, F\}) = 3$, $p(\{E, G\}) = 7$, $p(\{F, G\}) = 5$, $p(\{G, H\}) = 6$.

2. Use o algoritmo de Dijkstra para encontrar um caminho óptimo entre os vértices A e G do grafo da figura



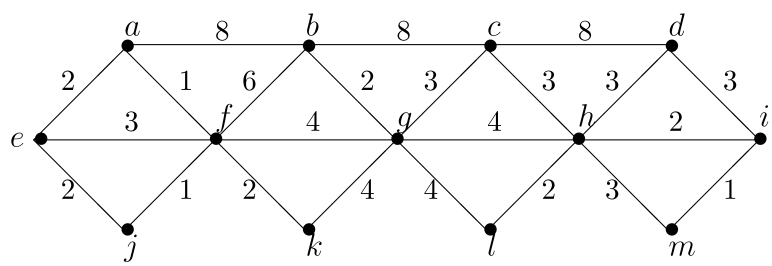
3. Determine o comprimento de um caminho mais curto e esse caminho mais curto entre os dois vértices dados no grafo com pesos da figura.



(a) a, f (b) a, g (c) a, z (d) b, j (e) h, d

4. Escreva um algoritmo que determine a distância entre dois vértices de um grafo com pesos conexo e que determine também um caminho mais curto.

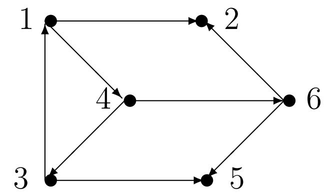
5. Relativamente ao grafo com pesos da figura, use o algoritmo de Dijkstra para determinar a distância e um caminho mais curto de b para h.



6 Exercícios

1. Averigue se o grafo $(\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\})$ tem algum ciclo de Euler. Em caso negativo, justifique; em caso afirmativo, indique um ciclo de Euler do grafo.

2. Considere o grafo seguinte



(a) Seja A a matriz de adjacências de G. Escreva A, considerando os vértices ordenados pela ordem habitual.

(b) Diga, justificando e sem calcular as matrizes:

i) qual o elemento na posição 4,5 de A^2;

ii) qual o elemento na posição 1,2 de $A + A^2 + A^3$;

(c) Determine as componentes fracas, as componentes unilaterais e as componentes fortes do grafo.

3. (a) Defina caminho e ciclo entre dois vértices dum digrafo. Quando se diz que um ciclo é elementar?

(b) O digrafo da questão anterior tem ciclos? Se sim indique um ciclo elementar do digrafo.

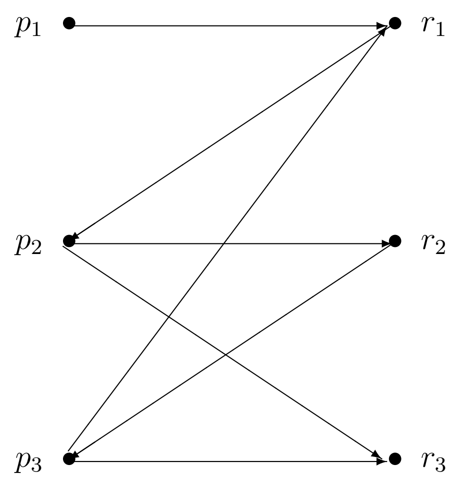
(c) Prove que num digrafo simples com n vértices o comprimento de um caminho elementar é menor ou igual do que $n - 1$.

4. Complete a demonstração seguinte de que as componentes fortes de um digrafo determinam uma partição dos seus vértices (Note que essa demonstração tem de ser completada em duas partes do texto assinaladas por "...(1)..."e "...(2)...". Na sua folha de respostas só deve ser escrito o que falta em (1) e (2) para que a demonstração fique completa.):

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um digrafo, seja $v \in V$ e seja S o conjunto de todos os vértices u de G tais que existe um caminho de v para u e existe um caminho de u para v. É claro que o subgrafo de G induzido por S é fortemente conexo. Além disso, não existe nenhum subgrafo de G que o contenha propriamente e também seja fortemente conexo. Com efeito, se $S \subseteq H$ e o subgrafo induzido por H também é fortemente conexo, então, dado $w \in H$, ... (1) ..., pelo que $w \in S$ e, portanto, $S = H$.

Resta mostrar que v não pode pertencer a outra componente forte diferente de S. ... (2) ...

5. Considere o grafo seguinte



(a) Determine a sua matriz de adjacências considerando os vértices ordenados por p_1, p_2, p_3, r_1, r_2, r_3.

(b) Diga, justificando, se o grafo é bipartido.

(c) O grafo tem ciclos? Se sim, indique um deles.

(d) Suponha que o grafo representa o estado de utilização de recursos de um sistema operativo no instante t, sendo p_1, p_2 e p_3 programas e r_1, r_2 e r_3 recursos. Diga, justificando, se se verifica algum impasse.

(e) Determine as componentes fracas, as componentes unilaterais e as componentes fortes do grafo.

6. Seja G o grafo com pesos que tem$\{a, b, c, d\}$ por conjunto de vértices, $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{c, d$ por conjunto de arestas, e o peso das arestas é dado por $p(\{a, b\}) = 2$, $p(\{b, d\}) = 2$, $p(\{a, c\}) = 2$, $p(\{c, d\}) = 1$.

   (a) Represente o grafo.

   (b) Indique um caminho mais curto entre a e d.

   (c) Descreva o algoritmo de Dijkstra para determinar a distância de a a d. (Considere que os vértices estão ordenados por ordem alfabética.)

7. Considere a seguinte matriz de adjacências de um digrafo de vértices 1, 2, 3,

4, 5, considerando os vértices ordenados pela ordem natural:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Desenhe o digrafo colocando os vértices 1, 2 e 3 numa linha horizontal e os vértices 4 e 5 noutra linha horizontal por baixo da anterior.

(b) Diga, justificando, qual a distância entre o vértice 1 e 4.

(c) Sem calcular as matrizes diga, justificando, qual a entrada na posição 1,4 nas matrizes A^3 e A^4.

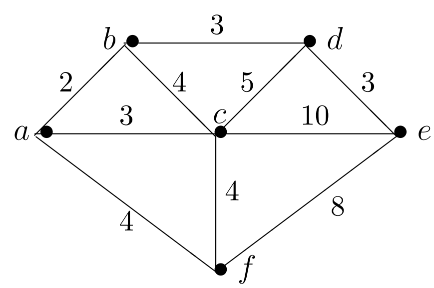
(d) Diga, justificando, se o grafo é fortemente conexo, unilateralmente conexo ou fracamente conexo.

(e) Determine as componentes fracas, unilaterais e fortes do grafo.

(f) Sem calcular a matriz, diga justificando quantos zeros tem a matriz dos caminhos do grafo.

(g) Defina ciclo de Euler. Em seguida diga, justificando, se o multigrafo não dirigido obtido do digrafo dado considerando cada aresta como uma aresta não dirigida tem ou não algum ciclo de Euler.

8. Considere o grafo com pesos seguinte.



(a) Aplique-lhe o algoritmo de Dijkstra considerando no início $L(a) = 0$ e $L(x) = \infty$ para $x \neq a$ e acabando apenas quando S contiver todos os vértices do grafo. Indique também em cada passo as arestas envolvidas. Pode apresentar os vários passos num quadro com três colunas, uma para S, outra para R (arestas) e outra para os valores de $L(x)$.

(b) Usando o feito na alínea anterior,

(i) desenhe a árvore com pesos obtida com o algoritmo,

(ii) indique a distância de a a e,

(iii) indique um caminho mais curto de a para e e outro de a para f.

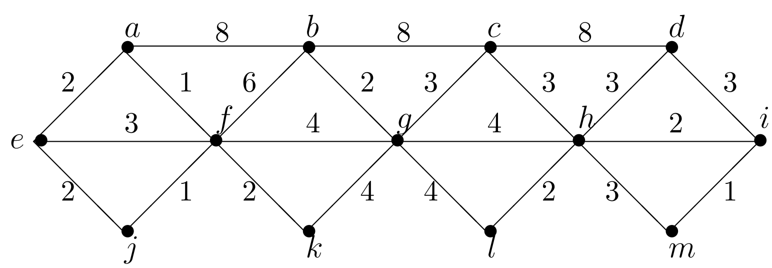
9. Seja G um grafo e A a sua matriz de adjacências.

   (a) Dado $k \in \mathbb{N}$, que informação dá a potência booleana $A^{(k)}$?

   (b) Qual o comprimento máximo de um caminho elementar entre dois vértices diferentes de um grafo de n vértices?

   (c) Suponha que o conjunto de vértices de G é $\{v_i : 1 \leq i \leq 20, i \in \mathbb{N}\}$. Justifique a afirmação seguinte num texto de entre 5 a 10 linhas: "A matriz dos caminhos de G é dada por $\bigvee_{i=0}^{19} A^{(k)}$."

10. Relativamente ao grafo com pesos da figura, use o algoritmo de Dijkstra para determinar a distância e um caminho mais curto de b para h.



11. A matriz dos caminhos de um digrafo G de vértices v_1, v_2, v_3 e v_4 (considerados por esta ordem) é $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

    (a) Defina matriz de caminhos de um grafo.

    (b) Diga, justificando, se o grafo G (cuja matriz dos caminhos é P) é fortemente conexo, unilateralmente conexo ou conexo.

    (c) Indique os vértices de cada uma das componentes fortemente conexas.

12. Uma rede rodoviária entre seis povoações, A, B, C, D, E e F, é constituída por oito estradas como descrito a seguir:

entre A e B com 30Km; entre A e C com 22Km; entre A e D com 30Km;

entre B e E com 20Km; entre C e E com 12Km; entre C e D com 36Km;

entre E e F com 40Km; entre D e F com 18Km.

Represente esta rede rodoviária por um grafo com pesos. Em seguida aplique o algoritmo de Dijkstra ao grafo para determinar o percurso mais curto da povoação D para a povoação B, bem como a respectiva distância.

13. (a) Desenhe um digrafo de vértices 1, 2 e 3 cuja matriz de adjacências A satisfaz a igualdade $A^3 = I$.

    (b) Indique o conjunto de arestas de um digrafo de vértices 1, 2, ..., n cuja matriz de adjacências A satisfaz a igualdade $A^n = I$.

14. Considere o digrafo $G = (V, E)$ onde $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{(a, b), (a, d), (b, c), (b, e), (c, e), (d, b), (e, d)\}$.

    (a) Desenhe o grafo G, colocando os vértices a, b e c numa mesma linha horizontal em cima e d e e numa mesma linha horizontal em baixo.

    (b) Indique a matriz de adjacências de G, considerando os vértices ordenados pela sua ordem alfabética, e denotando-a por A.

    (c) Sem calcular as matrizes diga, justificando, qual a entrada na posição 2,4 nas matrizes A^3 e A^4.

    (d) Determine as componentes fortes do grafo G.

    (e) Desenhe o grafo não dirigido com pesos que resulta de tirar as setas às aresta do grafo G e atribuir-lhe os seguintes pesos:

    o peso de $\{a, b\}$ é 1; o peso de $\{a, d\}$ é 3; o peso de $\{b, c\}$ é 2; o peso de $\{b, d\}$ é 1;

    o peso de $\{b, e\}$ é 7; o peso de $\{c, e\}$ é 3; o peso de $\{d, e\}$ é 5.

    Use o algoritmo de Dijkstra para determinar a distância e um caminho mais curto de a a e. (Considere que os vértices estão ordenados por ordem alfabética.)

15. Seja $G = (V, A)$ um grafo não dirigido simples (sem pesos)

    (a) Diga quando se diz que um caminho de G é elementar.

(b) Sabendo que G tem n vértices, mostre que um caminho elementar de G entre dois vértices diferentes tem comprimento menor ou igual a $n-1$.

(c) Mostre que a relação P definida por xPy := *existe um caminho de x para y*, definida no conjunto V dos vértices de G, é uma relação de equivalência.