

Departamento de Matemática – Escola Superior de Tecnologia – Instituto Politécnico de Viseu
Complementos de Análise Matemática Engenharia de Sistemas e Informática
Exame - Parte I - 20/01/2006 **Duração: 2h 30m**

Antes de iniciar a resolução da prova leia atentamente todo o enunciado inclusivé os Dados no final.

1. A temperatura de um determinado sólido é dada em cada ponto de coordenadas (x, y, z) , relativamente a um referencial ortonormado, por $h(x, y, z) = x + y\sqrt{x + z^2}$.

- (a) Diga qual é o domínio de definição de $h(x, y, z)$, D_h .
- (b) Verifique se o conjunto $D_h \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$ é aberto, fechado, limitado e compacto.
- (c) Determine o vector gradiente no ponto $(1, 2, 0)$.
- (d) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(1, 2, 0)$ direccionada segundo o vector $(-2, 1, -1)$.
- (e) Suponha que um ponto se desloca no sólido ao longo de uma curva de equações paramétricas $x = \cos^2(t)$, $y = t$, $z = \sin(t)$, onde t é a variável tempo. Mostre que a taxa de variação da temperatura (em função do tempo) ao longo da trajectória do ponto é dada por $h'(t) = 1 - \sin(2t)$.

- (f) Estude a continuidade da função $g(x, y, z) = \begin{cases} h(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in D_h \\ \frac{x^2 y}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{se } (x, y, z) \notin D_h \end{cases}$ em $(0, 0, 0)$.

2. Determine três números não negativos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

3. Calcule $\iiint_B \sin(y - x) - z \cos(y) \, dV$ onde B é o sólido definido pelas condições:

$$0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x - z \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 2z.$$

4. Um tanque com o formato de uma esfera de raio 2m é despejado. A altura da água no tanque ao fim de t segundos, designada por $y(t)$, satisfaz a equação diferencial

$$(4y - y^2) \frac{dy}{dt} = -0.0001 \sqrt{20y}.$$

- (a) Resolva a equação diferencial, sabendo que inicialmente o tanque está cheio.
- (b) Quanto tempo leva o tanque a esvaziar?

5. Encontre a transformada de Laplace de cada uma das seguintes funções:

(a) $\cos(t) U(t - \pi/2)$

(b) $\int_0^t \delta(\tau - 1) e^{t-\tau} d\tau$

6. Prove que, sob condições adequadas, a transformada de Laplace satisfaz a propriedade

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$

V.S.F.F.

7. Relativamente ao sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x = -e^{-t}$$

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + x + 2y = 0,$$

sujeito às condições iniciais

$$x(0) = -1, y(0) = 1$$

determine a expressão de $y(t)$.

8. Considere a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}}$.

(a) Desenvolva em série de potências de x a função $f(x)$, indicando o raio de convergência.

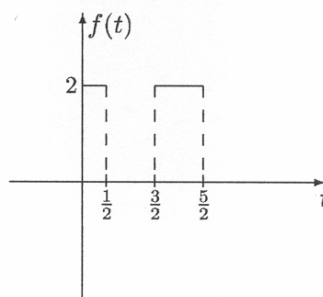
(b) Apresente o integral $\int_0^1 f(x)dx$ sob a forma de uma série numérica.

(c) Obtenha o valor do integral da alínea anterior com um erro inferior a 10^{-2} .

(d) Seja a_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, tal que a série da alínea (a) é da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$. Indique,

justificando, a natureza da série $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^n + a_n(1.5)^n)$.

9. Considere a função f representada na figura.



(a) Determine o desenvolvimento em série de senos de $f(t)$.

(b) Diga, justificando, o valor da série determinada em (a) nos pontos $t = -\frac{3}{2}$ e $t = 2$.

Dados:

1) Série binomial: $(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$, onde $\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)}{n!}$, para $k \in \mathbb{R}$ e $|x| < 1$

2) $\int x \cos(ax) dx = (\cos(ax) + ax \sin(ax))/a^2$

3) O desenvolvimento em série de Fourier de uma função $f(t)$ de período T , caso exista, é dado por:

$A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + B_n \sin \frac{2n\pi t}{T})$, onde $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, $A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt$
e $B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt$ para $n \geq 1$.

Cotação:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	
	3.5	1.5	1.5	2	1	1.5	2	3	2	(Total:18)

CAM

Exame Janeiro 2006

1. (a) $D_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z^2 \geq 0\}$

(b) $A = D_h \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 0\}$ é a parte da esfera aberta de centro na origem e raio $\sqrt{2}$ exterior ao "sólido aberto infinito" $x + z^2 < 0$.

O conjunto A não é aberto visto que $O = (0, 0, 0) \in A$ mas não é possível arranjar $\varepsilon > 0$ tal que $B(O, \varepsilon) \subseteq A$, já que $(-a, 0, 0) \notin A$ para nenhum $a > 0$.

Também não é fechado visto que A^c não é aberto: o ponto $(\sqrt{2}, 0, 0) \in A^c$ mas não existe nenhuma bola aberta que contenha e esteja contida em A^c , já que $(\sqrt{2}-a, 0, 0) \notin A$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < \sqrt{2}$.

O conjunto A é limitado porque

$$A \subseteq B(0, \sqrt{2}), \text{ ou seja, } \forall p \in A \quad \|p\| < \sqrt{2}.$$

Para ser compacto A teria de ser limitado e fechado, logo não é compacto.

$$(c) \nabla h = (h_x, h_y, h_z) = \left(1 + \frac{y}{2\sqrt{x+z^2}}, \sqrt{x+z^2}, 2yz \frac{1}{2\sqrt{x+z^2}}\right) \quad 2$$

$$= \left(1 + \frac{y}{2\sqrt{x+z^2}}, \sqrt{x+z^2}, \frac{yz}{\sqrt{x+z^2}}\right)$$

$$\nabla h(1, 2, 0) = \left(1 + \frac{2}{2\sqrt{1+0^2}}, \sqrt{1+0^2}, \frac{2 \times 0}{\sqrt{1+0^2}}\right)$$

$$= (2, 1, 0)$$

(d) A taxa de variaç da temperatura é dada pela derivada direccional $D_{(-2, 1, -1)} h(1, 2, 0)$.

$$D_{(-2, 1, -1)} h(1, 2, 0) = \nabla h(1, 2, 0) \cdot \frac{(-2, 1, -1)}{\|(-2, 1, -1)\|}$$

$$= (2, 1, 0) \cdot \frac{(-2, 1, -1)}{\sqrt{4+1+1}}, \text{ usando o resultado de (c)}$$

$$= \frac{-4+1+0}{\sqrt{6}} = -\frac{3}{\sqrt{6}}$$

(e) Taxa de variaç de temperatura em func do tempo: $h'(t)$.
Determinaç da expressões de $h'(t)$, usando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} h'(t) &= h_x(x(t)) x'(t) + h_y(y(t)) y'(t) + h_z(z(t)) z'(t) = \\ &= \left(1 + \frac{y}{2\sqrt{x+z^2}}\right) \cdot (-2 \cos t \sin t) + \sqrt{x+z^2} \cdot 1 + \frac{yz}{\sqrt{x+z^2}} \cdot \cos t \end{aligned}$$

$$\text{Como } \sqrt{x+z^2} = \sqrt{x(t) + (z(t))^2} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1,$$

fica

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(1 + \frac{t}{2}\right) \cdot (-2 \cos t \sin t) + 1 + \frac{t \sin t}{1} \cos t \\ &= -2 \cos t \sin t - t \cos t \sin t + 1 + t \sin t \cos t \\ &= 1 - 2 \cos t \sin t \\ &= 1 - \sin 2t \end{aligned}$$

$$(f) \quad \lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0) \\ (x,y,z) \in D_h}} g(x,y,z) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} (x + y \sqrt{x+z^2}) = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0) \\ (x,y,z) \notin D_h}} g(x,y,z) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot y \right)$$

A função $\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ é limitada, pois que $|x^2| = x^2 \leq |x^2 + y^2 + z^2|$ e, portanto, $\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq 1$,

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} y = 0$.

$$\text{Logo } \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot y = 0$$

Como o limite é 0 em D_h e em $\mathbb{R}^3 \setminus D_h$, conclui-se que o limite de $g(x,y,z)$ quando $(x,y,z) \rightarrow 0$

4

é 0. Como $g(0,0,0)=0$, concluímos então que a função é contínua no ponto $(0,0,0)$.

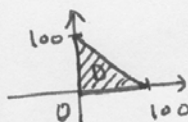
2. Pretendemos encontrar $x, y, z \geq 0$ tais que

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ xyz \text{ é máximo} \end{cases}$$

Pondo $z=100-(x+y)$, pretendemos então maximizar a função

$$f(x,y) = xy(100-(x+y)) \text{ , para } x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 100$$

Se a função tiver um máximo absoluto, ele vai ser um dos máximos locais ou é atingido na fronteira do conjunto D representado na figura:



Nas para qualquer (x,y) pertencente à fronteira de D , tem-se $f(x,y)=0$, logo o máximo absoluto não é atingido nestes pontos.

Vamos determinar os pontos críticos da função que são os candidatos a extremantes locais.

$$f_x = y(100 - (x+y)) + xy(-1)$$

$$f_y = x(100 - (x+y)) + xy(-1)$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(100 - (x+y)) - xy = 0 \\ -x(100 - (x+y)) + xy = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(100 - (x+y)) - xy = 0 \\ (x-y)(100 - (x+y)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(100 - (x+y)) - xy = 0 \\ x = y \vee 100 - x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y(100 - 2y) - y^2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (100-x)(100 - (x+100-x)) - x(100-x) = 0 \\ y = 100 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y(100 - 2y - y) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (100-x)x = 0 \\ y = 100 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = \frac{100}{3} \\ x = 0 \\ y = 100 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 100 \\ y = 0 \end{cases}$$

① ② ③ ④

Nos casos ①, ③ e ④ temos $f(x, y) = 0$ que claramente não é um máximo.

Quanto ao caso ②, vamos averiguar se se trata de um maximizante local usando a função

$$g(x, y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$f_{xx} = -y - y = -2y$$

$$f_{yy} = -x - x = -2x$$

$$f_{xy} = 100 - (x+y) - y - x = 100 - 2(x+y)$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) &= \left(-2 \cdot \frac{100}{3}\right) \times \left(-2 \cdot \frac{100}{3}\right) - \left(100 - 2\left(\frac{100}{3} + \frac{100}{3}\right)\right)^2 \\ &= \frac{4}{9} 10^4 - \left(10^2 - \frac{4}{3} 10^2\right)^2 \\ &= \frac{4}{9} 10^4 - 10^4 \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right) \times 10^4 \\ &= \frac{1}{3} \times 10^4 > 0 \end{aligned}$$

Logo f tem um extremo local em $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$.

Como $f_{xx}\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = -2 \times \frac{100}{3} < 0$, concluímos que

tem um máximo local em $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$.

Como este é o único máximo local, atendida as exportações no início, conclui-se que ele é um máximo absoluto.

Assim

$$x = \frac{100}{3}, \quad y = \frac{100}{3} \quad \text{e} \quad z = 100 - (x+y) = \frac{100}{3}$$

são os três números procurados.

$$\begin{aligned}
3. \quad \iiint_B (\sin(y-x) - z \cos y) dV &= \int_0^1 \int_0^{2z} \int_0^{x-z} (\sin(y-x) - z \cos y) dy dx dz \quad (7) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2z} \left[-\cos(y-x) - z \sin y \right]_0^{x-z} dx dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{2z} \left(-\cos(x-z-x) - z \sin(x-z) - (-\cos(0-x) - z \sin 0) \right) dx dz \\
&= \int_0^1 \int_0^{2z} \left(-\cos z - z \sin(x-z) + \cos x \right) dx dz \\
&= \int_0^1 \left[-z \cos z + \left[z \cos(x-z) + \sin x \right]_0^{2z} \right] dz \\
&= \int_0^1 \left(-z \cos z + \left(z \cos(2z-z) + \sin 2z - (z \cos(0-z) + \sin 0) \right) \right) dz \\
&= \int_0^1 \left(-z \cos z + z \cos z + \sin 2z - z \cos z \right) dz \\
&= \int_0^1 (\sin 2z - z \cos z) dz \\
&= \left[-\frac{\cos 2z}{2} - (2 \cos z + 2z \sin z) \right]_0^1 \\
&= -\frac{\cos 2}{2} - (2 \cos 1 + 2 \sin 1) - \left(-\frac{\cos 0}{2} - (2 \cos 0 + 2 \times 0 \sin 0) \right) \\
&= -\frac{\cos 2}{2} - 2 \cos 1 - 2 \sin 1 + \frac{1}{2} + 2 \\
&= -\frac{\cos 2}{2} - 2 \cos 1 - 2 \sin 1 + \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

8

4(a) Pretendemos resolver a equação diferencial dada sujeita à condição inicial $y(0) = 4$.

$$(4y - y^2) \frac{dy}{dt} = -0.0001\sqrt{20y}$$

$$\frac{4y - y^2}{-0.0001\sqrt{20y}} dy = dt$$

$$\left(\frac{-4 \times 10^4}{2\sqrt{5}} \frac{y}{\sqrt{y}} + \frac{10^4}{2\sqrt{5}} \frac{y^2}{\sqrt{y}} \right) dy = dt$$

$$\int \left(\frac{-4 \times 10^4}{2\sqrt{5}} y^{\frac{1}{2}} + \frac{10^4}{2\sqrt{5}} y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \int dt + C$$

$$\frac{-4 \times 10^4}{2\sqrt{5}} \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{10^4}{2\sqrt{5}} \frac{y^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = t + C$$

$$\frac{-4 \times 10^4}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{10^4}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} = t + C$$

$$y(0) = 4 \Rightarrow \frac{2 \times 10^4}{2\sqrt{5}} \left(-\frac{4}{3} \times 4^{\frac{3}{2}} + \frac{4^{\frac{5}{2}}}{5} \right) = 0 + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \times 10^4}{2\sqrt{5}} \left(-\frac{4}{3} \times 8 + \frac{32}{5} \right) = C$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow C &= \frac{10^4}{\sqrt{5}} \left(-\frac{32}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{10^4 \times 32}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{10^4 \times 32}{\sqrt{5}} \left(\frac{-5+3}{15} \right) = \frac{10^4 \times 32 \times (-2)}{15\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Solução da equação diferencial:

$$-\frac{4 \times 10^4}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{3} Y^{\frac{3}{2}} + \frac{10^4}{2\sqrt{5}} \frac{2}{5} Y^{\frac{5}{2}} = t + \frac{10^4 \times 32 \times (-2)}{15\sqrt{5}}$$

$$(b) \quad Y(t) = 0 \Leftrightarrow 0 = t + \frac{10^4 \times 32 \times (-2)}{15\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{64 \times 10^4}{15\sqrt{5}}$$

O tanque leva $\frac{64 \times 10^4}{15\sqrt{5}}$ segundos a esvaziar, ou seja, cerca de 5 horas.

$$\begin{aligned} 5. (a) \quad \mathcal{L} \{ \cos t \, u(t - \frac{\pi}{2}) \} &= \mathcal{L} \{ \sin(\frac{\pi}{2} - t) \, u(t - \frac{\pi}{2}) \} \\ &= -\mathcal{L} \{ \sin(t - \frac{\pi}{2}) \, u(t - \frac{\pi}{2}) \} \\ &= -e^{\frac{\pi}{2}s} \frac{1}{s^2 + 1} \quad (\text{usando a Tabela das transfs. de Laplace}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \mathcal{L} \left\{ \int_0^t \delta(z-1) e^{t-z} dz \right\} &= \\ &= F(s) G(s), \quad \text{onde } f(t) = \delta(t-1) \text{ e } g(t) = e^t \\ &= \frac{e^{-s}}{s-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad \mathcal{L} \{ f'(t) \} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \quad \boxed{\int u v' = uv - \int u' v} \\ &= \left[e^{-st} f(t) \right]_0^\infty - \int_0^\infty -s e^{-st} f(t) dt \\ &= s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) - f(0) \end{aligned}$$

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$, para todo s tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$ and $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe.

7. Aplicando a transformada de Laplace ao sistema dado, tem-se

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) + sY(s) - y(0) + X(s) = -\frac{1}{s+1} \\ sX(s) - x(0) + 2(sY(s) - y(0)) + X(s) + 2Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} sX(s) + 1 + sY(s) - 1 + X(s) = -\frac{1}{s+1} \\ sX(s) + 1 + 2sY(s) - 2 + X(s) + 2Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (s+1)X(s) + sY(s) = -\frac{1}{s+1} \\ (s+1)X(s) + (2s+2)Y(s) = 1 \end{cases}$$

Das duas igualdades, subtraindo membro a membro, obtém-se

$$sY(s) - (2s+2)Y(s) = -\frac{1}{s+1} - 1$$

donde

$$(s - 2s - 2)Y(s) = \frac{-1 - s - 1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

pelo que $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$.

$$8(a) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}} = \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n, \text{ para } \left|\frac{x^2}{4}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n} x^{2n}, \text{ para } |x|^2 < 4, \text{ i.e.,}$$

$$\text{para } |x| < 2, \text{ ou seja,}$$

o raio de convergência é 2.

$$(b) \quad \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n} x^{2n} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n} \int_0^1 x^{2n} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n} \left(\frac{1}{2n+1} - 0 \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n (2n+1)}$$

$$(c) \quad \binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1; \quad \binom{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1!} = -\frac{1}{2}; \quad \binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2} = \frac{3}{2^3};$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{2 \times 3} = -\frac{5}{2^4}$$

A série é alternada visto que o numerador de $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$ é constituído por um produto de factores negativos alternando a periodicidade do nº de factores.

Além disso $b_n = \left| \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n(2n+1)} \right|$ é uma sucessão decrescente a convergir para 0. Consequentemente, denotando por S a soma da série e por S_n a sucessão das somas parciais, temos

$$|S_n - S| < b_{n+1}$$

Pretendemos que $a_{n+1} < 10^{-2}$, ou seja, que

$$\left| \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n(2n+1)} \right| < 10^{-2}$$

Basta tomar $n=2$, visto que

$$\left| \binom{-\frac{1}{2}}{2} \frac{1}{4^2(2 \cdot 2 + 1)} \right| = \frac{3}{2^2} \times \frac{1}{4^2 \times 5} = 0.0046875 < 10^{-2}$$

Assim

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{n=0}^2 \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{4^n(2n+1)} = \binom{-\frac{1}{2}}{0} \frac{1}{1} + \binom{-\frac{1}{2}}{1} \frac{1}{4 \times 3}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{23}{24}$$

(d) Da alínea (a) sabemos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ é convergente para $|x| < 2$. Ora

$$1.5^n = x^{2n} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{1.5} \in]-2, 2[$$

Logo a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 1.5^n$

é convergente.

Por outro lado, $\sum_{n=0}^{+\infty} e^n$ é divergente visto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = +\infty \neq 0.$$

Sendo a "soma de uma série divergente com uma convergente", a série dada é divergente.

9. (a) Seja $g(t)$ a func^o obtida de $f(t)$ por extensão a todo o $\mathbb{R}$ sob a forma de func^o ímpar. Esta func^o tem período $T = 2 \times \frac{5}{2} = 5$ e admite desenvolvimento em série de Fourier com os coeficientes A_n todos nulos.

Os coeficientes B_n são dados por:

$$B_n = \frac{2}{5} \int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}} g(t) \sin \frac{2n\pi t}{5} dt$$

14

$$= \frac{4}{5} \int_0^{\frac{5}{2}} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{5} dt, \quad \text{porque a função integranda é par}$$

$$= \frac{4}{5} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 2 \sin \frac{2n\pi t}{5} dt + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} 2 \sin \frac{2n\pi t}{5} dt \right)$$

$$= \frac{4}{5} \left(\left[-2 \times \frac{5}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi t}{5} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-2 \frac{5}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi t}{5} \right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \right)$$

$$= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{n\pi} \right) \left(\cos \frac{2n\pi \frac{1}{2}}{5} - \cos \frac{2n\pi \times 0}{5} + \cos \frac{2n\pi \frac{5}{2}}{5} - \cos \frac{2n\pi \frac{3}{2}}{5} \right)$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{5} - 1 + \cos n\pi - \cos \frac{3n\pi}{5} \right)$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{5} - \cos \frac{3n\pi}{5} - 1 + (-1)^n \right)$$

Desenvolvimento em série de senos da função dada:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} + \frac{4}{n\pi} \left(1 - (-1)^n + \cos \frac{3n\pi}{5} - \cos \frac{n\pi}{5} \right) \sin \frac{2n\pi t}{5}$$

(b) A série converge em cada t para $\frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}$.

Logo o valor da série em $t = -\frac{3}{2}$ é

$$\frac{f(-\frac{3}{2}^-) + f(\frac{3}{2})}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1$$

e em $t = 2$ é $\frac{g(2^-) + g(2^+)}{2} = f(2) = 2.$

14

$$= \frac{4}{5} \int_0^{\frac{5}{2}} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{5} dt, \quad \text{porque a função integranda é par}$$

$$= \frac{4}{5} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 2 \sin \frac{2n\pi t}{5} dt + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} 2 \sin \frac{2n\pi t}{5} dt \right)$$

$$= \frac{4}{5} \left(\left[-2 \times \frac{5}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi t}{5} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-2 \frac{5}{2n\pi} \cos \frac{2n\pi t}{5} \right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \right)$$

$$= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{n\pi} \right) \left(\cos \frac{2n\pi \frac{1}{2}}{5} - \cos \frac{2n\pi \times 0}{5} + \cos \frac{2n\pi \frac{5}{2}}{5} - \cos \frac{2n\pi \frac{3}{2}}{5} \right)$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{5} - 1 + \cos n\pi - \cos \frac{3n\pi}{5} \right)$$

$$= -\frac{4}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{5} - \cos \frac{3n\pi}{5} - 1 + (-1)^n \right)$$

Desenvolvimento em série de senos da função dada:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} + \frac{4}{n\pi} \left(1 - (-1)^n + \cos \frac{3n\pi}{5} - \cos \frac{n\pi}{5} \right) \sin \frac{2n\pi t}{5}$$

(b) A série converge em cada t para $\frac{g(t^-) + g(t^+)}{2}$.

Logo o valor da série em $t = -\frac{3}{2}$ é

$$\frac{g(-\frac{3}{2}^-) + g(\frac{3}{2})}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1$$

e em $t = 2$ é $\frac{g(2^-) + g(2^+)}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$.