

Departamento de Matemática - Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática - Exame - 23/06/2006
Versão A

Duração: 2h 45m

Escreva no início da folha de respostas qual a versão do seu enunciado.

I

Para cada uma das questões seguintes deve apenas indicar a opção correcta. Por cada resposta errada desconta-se 0.4 à cotação.

1. Relativamente às fbf's F_1 e F_2 do cálculo de predicados e à interpretação I seguintes

$$F_1 := \forall x \forall y (q(x, y) \rightarrow p(x) \wedge \neg q(x, y))$$

$$F_2 := \forall x (p(x) \rightarrow \exists y q(x, y))$$

$$I := \begin{cases} \text{universo} : \{2, 3, 4, 5, \dots\} \\ p(x) := x \geq 0 \\ q(x, y) := x \times y = 1 \end{cases}$$

- (A) F_1 é uma contradição, I é um modelo de F_2 .
(B) F_1 é uma contradição e F_2 não é uma tautologia.
(C) F_1 é uma contradição, I não é um modelo de F_2 .
(D) I é um modelo de F_1 , F_2 não é uma tautologia.
(E) I é um modelo de F_1 e F_2 .
2. Quanto às relações seguintes definidas no conjunto dos números naturais
 xRy se $x + y$ é ímpar xSy se $x = y^2$ xTy se $y = x^2$
- (A) R é simétrica, R e S são irreflexivas, T é função e S é uma função parcial.
(B) R é simétrica e irreflexiva, T é função, S não é uma função parcial.
(C) R é simétrica e irreflexiva, T e S são funções.
(D) R e S são irreflexivas, T e S não são funções parciais.
(E) R é simétrica e irreflexiva, S é anti-simétrica, T é função e S é uma função parcial.
3. A seguinte “prova” por indução (forte) sobre n de que $3^n = 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ tem um erro:

Base indutiva: $3^0 = 1$ é verdadeiro por definição de 3^0 .

Hipótese indutiva: $3^k = 1$ para todo o $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq n$.

Passo indutivo:

$$3^{n+1} = 3^{2n-(n-1)} = \frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1.$$

O erro consiste no seguinte:

- (A) A formulação da hipótese indutiva está errada.
(B) A igualdade $3^{2n-(n-1)} = \frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}}$ não se verifica para todos os números naturais.
(C) A igualdade $3^{n+1} = 3^{2n-(n-1)}$ não se verifica para todos os números naturais.
(D) O passo indutivo não funciona para todos os $n \geq 0$ porque para $n + 1 = 1$ não podemos concluir a igualdade $\frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1}$ da hipótese indutiva.
(E) O passo indutivo não funciona para todos os $n \geq 0$ porque para $n + 1 = 2$ não podemos concluir a igualdade $\frac{3^n \times 3^n}{3^{n-1}} = \frac{1 \times 1}{1}$ da hipótese indutiva.

4. Relativamente aos seguintes grafos dirigidos, indique a afirmação correcta:

$$G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(2, 1), (2, 4), (3, 1), (4, 1), (4, 2)\})$$

$$H = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, a), (d, b), (d, c)\})$$

$$J = (\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \{(\beta, \alpha), (\beta, \delta), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\delta, \beta), (\delta, \alpha)\})$$

$$K = (\{x, y, z, w\}, \{(x, y), (y, w), (z, x), (z, y), (w, y), (w, z)\})$$

(A) Dois dos grafos são isomorfos, H e K são fortemente conexos, J é unilateralmente conexo, mas não fortemente conexo, G não é unilateralmente conexo.

(B) Quaisquer dois dos quatro grafos são não isomorfos, H é fortemente conexo, G , J e K são unilateralmente conexos, mas não fortemente conexos.

(C) Quaisquer dois dos quatro grafos são não isomorfos, H e K são fortemente conexos, J é unilateralmente conexo, mas não fortemente conexo, G não é unilateralmente conexo.

(D) Dois dos grafos são isomorfos, e todos são unilateralmente conexos.

(E) Nenhuma das alíneas anteriores se verifica.

II

1. Considere a seguinte tabela de verdade

p	q	r	f
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

(a) Escreva uma fbf com esta tabela de verdade, onde figurem as três variáveis p , q e r e que seja uma disjunção de conjunções de literais.

(b) Mostre que essa fbf é logicamente equivalente à fbf $p \wedge r$.

(c) Obtenha uma fbf logicamente equivalente às anteriores onde figurem apenas os conectivos lógicos $\neg$ e $\rightarrow$.

2. Considere:

A :=Tia Ágata, C :=Carlos, M :=Mordomo,

$r(x, y)$:= x é mais rico do que y , $d(x, y)$:= x odeia y , $p(x)$:= x roubou o colar de pérolas.

(a) Expresse as seguintes afirmações sob a forma de fbf's do cálculo dos predicados, sabendo que o universo é constituído pelas pessoas que moram na Mansão Assombrada, entre as quais se contam a Tia Ágata, o Carlos e o Mordomo.

(i) Todos odeiam o Mordomo.

(ii) Nenhum deles roubou o colar de pérolas.

(iii) Se algum dos moradores não odeia a Tia Ágata e é mais pobre do que ela, então roubou o colar de pérolas.

(iv) Carlos não odeia ninguém que o Mordomo odeie.

(b) Faça uma demonstração formal de

$$r(A, C), d(M, A), \forall x(d(M, x) \rightarrow \neg d(C, x)), \forall x(\neg d(x, A) \wedge r(A, x) \rightarrow p(x)) \vdash p(C)$$

(c) Sabe-se que a Tia Ágata é mais rica do que Carlos, o Mordomo odeia a tia Ágata, Carlos não odeia nenhuma pessoa odiada pelo Mordomo, e ainda que se algum dos moradores não odeia a Tia Ágata e é mais pobre do que ela então roubou o colar de pérolas. O que pode dizer sobre a identidade do ladrão do colar de pérolas?

(d) Quando é que uma fbf do cálculo de predicados se diz uma tautologia? Diga, justificando, se a seguinte fbf é ou não uma tautologia:

$$r(A, C) \wedge d(M, A) \wedge \forall x(d(M, x) \rightarrow \neg d(C, x)) \wedge \forall x(\neg d(x, A) \wedge r(A, x) \rightarrow p(x)) \rightarrow p(C)$$

3. Considerando $\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ como conjunto universal, sejam $A = \{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$, $B = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ e $C = \{x : 1/2 < x < 11/5\}$.

(a) Indique o cardinal de C .

(b) Determine (em extensão) os conjuntos $A \cap C$, B^c , $A \cup B^c$, $A - B$, $A \times B$ e 2^B .

(c) Escreva os elementos do conjunto $A \times B$ por ordem lexicográfica crescente.

4. Considere as relações seguintes:

(i) xRy se $x \leq 2y$, no conjunto dos números inteiros positivos;

(ii) xSy se $x = 2y$, no conjunto dos números inteiros positivos;

(iii) xCy se $x \subseteq y$ no conjunto dos subconjuntos de $A = \{a, b, c\}$

(a) Uma das relações é de ordem parcial. Indique-a, justificando, e desenhe o correspondente diagrama de Hasse.

(b) Uma das relações não é de ordem parcial mas é anti-simétrica. Indique-a justificando.

5. Seja xFy a relação x é filho ou filha de y , seja F^{-1} a relação inversa desta. Traduza as relações seguintes na linguagem do dia-a-dia do contexto familiar:

(i) F^{-1} , (ii) $F^{-1} \cdot F^{-1}$, (iii) $F \cdot F$.

6. (a) Prove por indução que para todo o $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$.

(b) Use o resultado da alínea anterior para calcular a diferença entre a soma dos quadrados dos primeiros 10 números inteiros positivos pares e a soma dos 10 primeiros inteiros positivos ímpares.

7. Considere o conjunto $A = \{c, a, b, o\}$.

(a) Determine o número de listas de elementos de A de comprimento três cuja cabeça é uma vogal.

(b) Seja $\mathcal{W}$ o conjunto de todas as *strings* sobre o alfabeto A definidas recursivamente por:

(i) a e o pertencem a $\mathcal{W}$.

(ii) Se $S \in \mathcal{W}$ e S começa por uma vogal então $b \cdot S$ e $c \cdot S$ pertencem a $\mathcal{W}$. Se $S \in \mathcal{W}$ e S começa por uma consoante então $a \cdot S$ e $o \cdot S$ pertencem a $\mathcal{W}$.

Apresente todas as *strings* de $\mathcal{W}$ de comprimento menor ou igual a 3.

- (c) Defina recursivamente o conjunto de todas as árvores binárias sobre A tais que cada nodo com filho tem ou dois filhos etiquetados por duas vogais ou dois filhos etiquetados por duas consoantes.
8. Considere o digrafo $G = (V, E)$ onde $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{(a, b), (a, d), (b, c), (b, e), (c, e), (d, b), (e, d)\}$.
- Desenhe o grafo G , colocando os vértices a, b e c numa mesma linha horizontal em cima e d e e numa mesma linha horizontal em baixo.
 - Indique a matriz de adjacências de G , considerando os vértices ordenados pela sua ordem alfabética, e denotando-a por A .
 - Sem calcular as matrizes diga, justificando, qual a entrada na posição 2,4 nas matrizes A^3 e A^4 .
 - Determine as componentes fortes do grafo G .
9. Uma rede rodoviária ligando entre si oito cidades, $A, B, \dots$, é constituída pelas seguintes estradas:
- | | |
|---|---|
| entre A e C , de 25 centenas de quilómetro; | entre A e E , de 35 centenas de quilómetro; |
| entre A e H , de 10 centenas de quilómetro; | entre B e C , de 25 centenas de quilómetro; |
| entre B e D , de 20 centenas de quilómetro; | entre B e F , de 10 centenas de quilómetro; |
| entre C e F , de 15 centenas de quilómetro; | entre C e G , de 5 centenas de quilómetro; |
| entre D e F , de 15 centenas de quilómetro; | entre E e H , de 20 centenas de quilómetro; |
| entre F e G , de 30 centenas de quilómetro; | entre G e H , de 25 centenas de quilómetro; |
- Desenhe um grafo com pesos que represente esta rede rodoviária, colocando os nodos na posição seguinte:
- | | | | |
|-------------------|---|---|---|
| | B | A | E |
| posição seguinte: | | F | C |
| | D | G | |
- Use o algoritmo de Dijkstra para determinar um caminho mais curto da cidade D para a cidade E .
 - Será possível percorrer todas as estradas desta rede rodoviária, cada uma exactamente uma vez, iniciando e acabando o percurso numa mesma cidade? Justifique convenientemente a sua resposta.
10. Seja $G = (V, A)$ um grafo não dirigido. Dado $v \in V$, seja

$$[v] = \{w \in V : \text{existe um caminho de } w \text{ para } v\}.$$

Prove que, se $u \in V$ é tal que $u \in [v]$ então $[u] = [v]$.

FIM

<u>Cotação:</u>	I.	II1.	II2.	II3.	II4.	II5.	II6.	II7	II8	II9	II10	Total
	5.2	1	1.8	0.8	1.2	0.8	1.2	1.2	1	1.8	1	17