Departamento: Matemática **Complementos de Análise Matemática**

Curso: Engenharia de Sistemas e Informática **Ano:** 4º **Semestre:** 1º **Ano Lectivo:** 2005/2006

Ficha prática nº1 - Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

1. Para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, determine o interior, o fecho, a fronteira e o derivado; diga se é aberto, fechado, limitado ou compacto:

   (a) $A = [-1, 2] \cup \{4\}$

   (b) $B = \{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$

   (c) $C = \{(x, y) : x > 4\}$

   (d) $D = \{(x, y) : y \leq -2\}$

   (e) $E = \{(x, y) : x = \pi\}$

   (f) $F = \{(x, y) : x = 0 \text{ e } 2 < y < 4\}$

   (g) $G = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$

   (h) $H = \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{N}\}$

   (i) $I = \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) : m, n \in \mathbb{N}\}$

   (j) $J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0\}$

2. Esboce o mapa de contornos (mapa das curvas de nível) das funções seguintes para os valores $-2, -1\ 0, 1, 2$:

   (a) $f(x, y) = xy$

   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$

   (c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

   (d) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

   (e) $f(x, y) = x^2 - y$

   (f) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

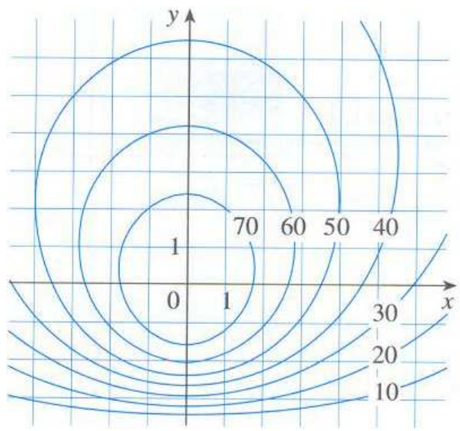
3. Uma camada fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos de cada curva de nível têm a mesma temperatura. Esboce algumas isotérmicas sabendo que a função temperatura é dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + y^2}.$$

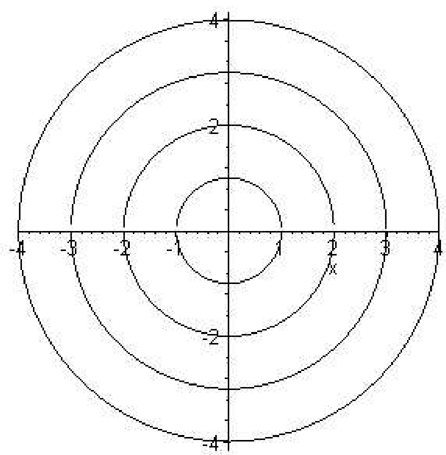
4. Se $V(x, y)$ é o potencial eléctrico de um ponto (x, y), as curvas de nível de V são as *curvas equipotenciais*, porque todos os pontos da cada uma destas curvas tem o mesmo potencial eléctrico. Suponha que c é uma constante positiva e $r = 1$. Esboce algumas curvas equipotenciais de

$$V(x, y) = \frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

5. Na figura seguinte está representado um mapa de contorno de uma função positiva definida em $\mathbb{R}^2$. Utilize-o e indique um valor aproximado para $f(-3,3)$ e $f(3,-2)$. Aparentemente, qual é o ponto com maior inclinação: $f(0,3)$ ou $f(3,0)$? Porquê?



6. A figura seguinte mostra um mapa de contorno de uma função, sendo do interior para o exterior, $k=1$, $k=4$, $k=9$, $k=16$. Faça um esboço do gráfico de f.



7. Calcule os domínios das seguintes funções: (a) $f(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$, (b) $f(x,y)=\frac{x+1}{x^2-y^2}$, (c) $f(x,y,z)=2+\tan x+y\sin z$, (d) $f(x,y,u,v,w)=w\ln(x-y)-xue^{vw}$.

8. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+y^2x-y^3}{x^2+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2}{x^4+y^2}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x+y-z}{2x-y}$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{xyz-xz}{|x|+|y-1|+|z|}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x\sin(x^2+y^2+z^4)}{x^2+y^2+z^4}$

9. Seja D o domínio da função f definida por:

$$f(x,y) = xy\sqrt{9-x^2-y^2}\,\sin\frac{1}{x-y}\,.$$

(a) Determine o interior, a fronteira, o fecho e o derivado de D e diga justificando, se D é aberto, fechado, limitado ou compacto.

(b) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2})} f(x,y)$.

10. (a) Mostre que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

(b) Verifique que $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$ e que $\displaystyle\lim_{y\to0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$.

(c) Comente os resultados das alíneas anteriores.

11. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{xy-y^2}{x^2-xy}$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Para $a \neq 0$, calcule:

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y)$; (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,a)} f(x,y)$; (iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(c) Estude a continuidade da função g definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \Leftarrow \quad (x,y)\in D_f \\ x & \Leftarrow \quad x=0 \lor y=x \end{cases}\,.$$

12. Diga, justificando, se as funções são contínuas nos pontos indicados:

    (a) $f(x,y) = \begin{cases} e^{x^2+y^2} & \text{se} \quad x^2 - y^2 < 0 \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$, no ponto (0,0);

    (b) $g(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin \frac{1}{y} & \text{se} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y = 0 \end{cases}$, nos pontos da forma $(a,0)$;

    (c) $h(x,y,z) = x \arctan \frac{y}{z}$, no ponto (1,1,1).

13. Determine os valores que pode ter o parâmetro r de forma que a função seguinte seja contínua:

$$h(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{(xyz)^r}{x^2+y^2+z^2} & \Leftarrow (x,y,z) \neq 0 \\ 0 & \Leftarrow (x,y,z) = 0 \end{cases}$$

14. Estude a continuidade das seguintes funções:

    (a) $f(x,y) = \ln(x+y-1)$; (b) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2-y^2}$; (c) $f(x,y) = \sqrt{x}e^{\sqrt{1-y^2}}$.

15. Determine o domínio de continuidade da função f dada por:

    (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x+y} & \text{se} \quad x \neq -y \\ 0 & \text{se} \quad x = -y \end{cases}$

    (c) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad y \neq x^2 \\ 1 & \text{se} \quad y = x^2 \end{cases}$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{se} \quad x^2+y^2 \leq 1 \\ -1 & \text{se} \quad x^2+y^2 > 1 \end{cases}$

16. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

    (a) Calcule, por definição, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

    (b) Estude a continuidade da função no ponto (0,0).

    (c) Tendo em conta as alíneas anteriores, comente a afirmação " Se uma função de duas variáveis tem derivadas parciais num ponto então é contínua nesse ponto."

    (d) Usando as alíneas anteriores, comente a afirmação " A função f não pode ter ambas as derivadas parciais contínuas no ponto (0,0)."

17. Determine as derivadas parciais das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$ (b) $g(r,s) = \sqrt{r^2+s^2}$ (c) $h(x,y) = xe^y + y\sin x$

(d) $f(t,v) = \ln\sqrt{(t+v)/(t-v)}$ (e) $g(x,y) = x\cos\frac{x}{y}$ (f) $h(r,s,t) = r^2e^{2s}\cos t$

(g) $h(q,v,w) = \arcsin\sqrt{qv} + \sin(vw)$ (h) $g(x,y,z) = xe^z - ye^x + ze^{-y}$ (i) $f(x,y,z) = (y^2+z^2)^x$

18. Se $w = 3x^2y^3z + 2xy^4z^2 - yz$, calcule w_{xyz}.

19. Se $u = v\sec rt$, calcule u_{rvr}.

20. Se $w = \sin xyz$, calcule $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\partial y\partial x}$.

21. Uma função f diz-se *harmónica* se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Mostre que as funções seguintes são harmónicas:

(a) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \cos x\sinh y + \sin x\cosh y$

22. Calcule o gradiente das seguintes funções:

(a) $f(u,w) = \arctan\frac{u}{v}$ (b) $f(x,y,z) = xyze^{xyz}$.

23. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Calcule o gradiente da função

$$g(x,y,z) = \int_0^{x+y^2+z^2} f(t)dt\,.$$

24. Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que v satisfaz a *equação da onda* $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

(a) $v = (\sin kx)(\sin akt)$ (b) $v = (x-at)^4 + \cos(x+at)$

25. Por meio de diferenciais, obtenha uma aproximação da variação de $f(x,y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$ quando (x,y) varia de (-2,3) a (-2.02, 3.01).

26. Use diferenciais para obter uma aproximação da variação de $f(x,y,z) = x^2z^3 - 3yz^2 + x^{-3} + 2y^{1/2}z$ quando (x,y,z) varia de (1,4,2) a (1.02, 3.97, 1.96).

27. Calcule aproximadamente, por meio de diferenciais, $\sqrt[3]{26.98}\sqrt{36.04}$.

28. O interior de uma lata tem dimensões de 3dm de diâmetro e 4dm de altura. Por meio de diferenciais, calcule aproximadamente a quantidade de folha metálica necessária para lata sabendo que a sua espessura é de é 0.015dm.

29. A resistência total R de três resistores R_1, R_2 e R_3 ligados em paralelo, é dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\,.$$

Se as medidas obtidas de R_1, R_2 e R_3 são 100, 200 e 400 ohms, respectivemente, com erro máximo de 1% em cada medida, obtenha uma aproximação do erro máximo no valor calculado de R.

30. A temperatura T no ponto $P(x,y,z)$ num sistema rectangular de coordenadas é dada por $T = 8(2x^2+4y^2+9z^2)^{1/2}$. Utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença de temperatura entre os pontos (6,3,2) e (6.1, 3.3, 1.98).

31. Use a regra da cadeia para calcular:

    (a) $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$ onde $w = u^2 \sin v$, $u = x^3 - 2y^2$, $v = xy^2$;

    (b) $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$ onde $w = \sqrt{u^2+v^2}$, $u = re^{-s}$, $v = s^2 + e^{-r}$;

    (c) $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ e onde $z = r^3 + s + v^2$, $r = xe^y$, $s = ye^x$, $v = x^2 y$;

    (d) $\frac{\partial r}{\partial u}$, $\frac{\partial r}{\partial v}$ e $\frac{\partial r}{\partial t}$ onde $r = x\cos y$, $x = u^2 - vt$, $y = v^2 - ut$;

    (e) $\frac{dw}{dt}$ onde $w = x^3 - y^3$, $x = y = \frac{1}{t+1}$;

    (f) $\frac{dw}{dt}$ onde $w = r^2 - s\tan v$, $r = \sin^2 t$, $s = \cos t$, $v = 4t$.

32. Uma função f de duas variáveis diz-se *homogénea de grau* n se $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ para todo o t tal que (tx,ty) esteja no domínio de f. Mostre que, para tais funções, $xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = nf(x,y)$.

33. Se f é diferenciável e $z = y + f(x^2 - y^2)$, mostre que

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x} + x\,\frac{\partial z}{\partial y} = x\,.$$

34. Sendo $w = f(x,y)$, em que $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

35. Seja $v = f(x-at) + g(x+at)$, em que f e g têm derivadas parciais de segunda ordem. Mostre que v satisfaz a equação da onda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,.$$

36. Se f é diferenciável e $z = f(x, y)$, com $x = s + t$ e $y = s - t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\,\frac{\partial z}{\partial t}\,.$$

37. Mostre que a função f definida por

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{x^2}{4kt}}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

satisfaz a *equação de difusão*: $f_t = k f_{xx}$.

38. Determine a derivada direccional de f em P na direcção indicada:

(a) $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2$, $P = (3, -1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$;
(b) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$, $P = (4, -4)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$;
(c) $f(x,y) = \sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1}$, $P = (3, -2)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$;
(d) $f(x,y) = xcos^2 y$, $P = (2, \frac{\pi}{4})$, $\mathbf{v}$= (5,1);
(e) $f(x,y,z) = xy^2z^2$, $P = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$;
(f) $f(x,y,z) = z^2 e^{xy}$, $P = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

39. Uma chapa de metal está situada no plano xy de modo que a temperatura T em (x, y) seja inversamente proporcional à distância da origem e a temperatura em $P = (3, 4)$ é $100^o F$.

(a) Determine a taxa de variação de T em P na direcção do vector $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
(b) Em que direcção T aumenta mais rapidamente em P?
(c) Em que direcção a taxa de variação é nula?

40. O potêncial eléctrico em (x, y, z) é $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$.

(a) Determine a taxa de variação de V em $P = (2, -1, 3)$ na direcção de P para a origem.
(b) Ache a direcção que produz a taxa máxima de variação de V em P.
(c) Qual é a taxa máxima de variação em P?

41. A força num campo elétrico é dada por

$$h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e P é o ponto de coordenadas $(2, 1, 3)$.

(a) Determine o gradiente da função h.

(b) Calcule a taxa de variação de h no ponto P na direcção do vector $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$.

(c) Em que direcção, a partir de P, h aumenta mais rapidamente?

(d) Suponha que x, y e z são funções do tempo t dadas por $x = \cos t$, $y = \sin t$ e $z = t$ e considere h como uma função de t. Mostre que $h'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

42. Em cada uma das alíneas seguintes determine as equações do plano tangente e da normal ao gráfico da equação dada no ponto P indicado.

(a) $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 10$; $P(2, -3, 1)$ (b) $z = 4x^2 + 9y^2$; $P(-2, -1, 25)$
(c) $xy + 2yz - xz^2 + 10 = 0$; $P(-5, 5, 1)$ (d) $z = 2e^{-x} \cos y$; $P(0, \pi/3, 1)$

43. Determine os pontos do hiperbolóide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$.

44. Em cada uma das alíneas seguintes, determine os extremos locais da função f.

(a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ (b) $f(x, y) = x^2y - xy^2 - x^2 - y^2 - xy$
(c) $f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3$ (d) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$
(e) $f(x, y) = e^x \sin y$ (f) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$; $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$

45. Determine a menor distância do ponto $P(2, 1, -1)$ ao plano $4x - 3y + z = 5$.

46. Determine três números reais positivos cuja soma seja 1 000 e cujo produto seja máximo.