Departamento: Matemática **Complementos de Análise Matemática**

Curso: Engenharia de Sistemas e Informática **Ano:** 4º **Semestre:** 1º **Ano Lectivo:** 2005/2006

Ficha prática nº2 - Integrais Múltiplos

1. Calcule os integrais:

(a) $\int_1^2 \int_{-1}^2 (12xy^2 - 8x^3)\, dxdy$ (b) $\int_1^2 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y\, dydx$

(c) $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x - y)\, dxdy$ (d) $\int_0^1 \int_{-y-1}^{y-1} (x^2 + y^2)\, dxdy$

(e) $\int_1^2 \int_{x^3}^{x} e^{y/x}\, dydx$ (f) $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} (x \cos y - y \cos x)\, dydx$

(g) $\int_1^e \int_0^x \ln x\, dydx$ (h) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_{\tan x}^{\sec x} (y + \sin x)\, dydx$

2. Em cada uma das alíneas seguintes, esboce a região R limitada pelos gráficos das equações dadas. Supondo f contínua em R, expresse $\int\int_R f(x,y)dA$ de duas maneiras diferentes.

   (a) $4 + x - y = 0$, $y - \frac{3}{8}x = \frac{1}{4}$, $4x = y$
   (b) $x = \sqrt{3-y}$, $y = 2x$, $x + y + 3 = 0$
   (c) $y = e^x$, $y = \ln x$, $x + y = 1$, $x + y = 1 + e$

3. Use um integral duplo para calcular o volume do cilindro de bases $x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = 3$.

4. Determine o volume do sólido definido pelas superfícies $z = 0$, $z = \frac{1}{x+y}$, $1 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 1$.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, calcule a área da região limitada pelos gráficos das equações usando integrais duplos:

   (a) $y = 1/x^2$, $y = -x^2$, $x = 1$, $x = 2$;
   (b) $y^2 = x$, $x - y = 4$, $y = -1$, $y = 2$;
   (c) $y = x$, $y = 3x$, $x + y = 4$;
   (d) $y = e^x$, $y = \sin x$, $x = -\pi$, $x = \pi$.
   (e) $y = x^2$, $y = 1/(1 + x^2)$

6. Determine o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica de equação $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 2y$.

7. Calcule cada um dos seguintes integrais (trocando a ordem de integração se achar conveniente).

(a) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos x^2 dxdy$ (b) $\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dydx$

(c) $\int_1^e \int_0^{\ln x} ydydx$ (d) $\int_0^1 \int_y^1 y(x^2-y^2)\frac{1}{2}dxdy$

(e) $\int_0^\infty \int_{\frac{1}{4}y^{-2}}^{y^{-2}} x^2ye^{-x^2y^2}dxdy$ (f) $\int_0^2 \int_0^{2(y-1)} x^2dxdy$

8. Calcule $\int\int_R f(x,y)dA$ em cada um dos casos seguintes:

(a) R é o rectângulo de vértices (1,1,0), (2,1,0), (2,4,0) e (1,4,0) e $f(x,y)=x^2+y^2$.

(b) R é o triângulo equilátero de vértices (0,-1,0), $(3^{\frac{1}{2}},0,0)$ e (0,1,0) e $f(x,y)=x$.

9. Determine o volume do sólido abaixo do gráfico de $z=4x^2+y^2$ e acima da região rectangular R do plano xy de vértices (0,0,0), (0,1,0), (2,0,0) e (2,1,0).

10. Em cada uma das alíneas seguintes, calcule o volume do sólido limitado pelos gráficos de equações dadas.

(a) $x^2+z^2=9$, $y=2x$, $y=0$, $z=0$

(b) $2x+y+z=4x$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (c) $z=x^3$, $y=x$, $y=1$, $z=0$

11. Determine a área da região indicada em coordenadas polares:

(a) limitada por $r^2=9\sin 2\theta$, $\theta\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$; (b) interior a $r=2(1-\cos\theta)$ e exterior a $r=3$

12. Determine o volume do sólido interior à esfera $x^2+y^2+z^2=25$ e exterior ao cilindro $x^2+y^2=9$.

13. Calcule $\int\int\int_Q 3xy^3z^2\,dV$ onde $Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x\le 3,\ 1\le y\le 4,\ 0\le z\le 2\}$ de seis maneiras diferentes.

14. Use um integral triplo para determinar o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo plano $y+z=4$, pelo cilindro $y=x^2$ e pelos planos xy e yz.

15. Use integrais para determinar a fórmula do volume de uma esfera.

16. Calcule os integrais triplos seguintes:

(a) $\int_0^1 \int_{1+x}^{2x} \int_z^{x+z} x\ dydzdx$; (b) $\int_1^2 \int_0^{z^2} \int_{x-z}^{x+z} z\ dydxdz$; (c) $\int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2y\ dzdydx$

17. Determine $\int\int\int_E f(x,y,z)dV$ em cada um dos casos seguintes:

    (a) $f(x,y,z) = 2\cos x \cos y \cos z$ e
    $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,\ 0 \leq y \leq x,\ y \leq z \leq \pi/2\}$;

    (b) $f(x,y,z) = 2x + y + z$ e $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 3y,\ 1 \leq x \leq yz\}$;

    (c) $f(x,y,z) = y^2 e^{xy}$ e $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1;\ -1 \leq y \leq 2;\ 0 \leq x \leq y\}$.

18. Uma carga eléctrica é distribuída sobre o rectângulo $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ -2 \leq y \leq 2\}$, sendo que a densidade de carga no ponto (x,y) é dada por $\sigma(x,y) = x^2 + 3y^2$. Determine a carga eléctrica total do rectângulo.

19. Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região D e tem função densidade ρ:

    (a) $D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$; $\rho(x,y) = x^2$;

    (b) D é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(2,1)$ e $(0,3)$; $\rho(x,y) = x + y$;

    (c) D é a região limitada pela parábola $y = x^2$ e pela recta $y = 1$; $\rho(x,y) = xy$;

    (d) $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq cos(x); 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$, $\rho(x,y) = x$.

20. Determine a massa e o centro de massa do sólido E com a função densidade ρ:

    (a) E é limitado pelo cilindro hiperbólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x + z = 1$, $x = 0$ e $z = 0$; $\rho(x,y,z) = 4$

    (b) E é o cubo dado por $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$ e $0 \leq z \leq a$; $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

21. Próximo do nível do mar, a densidade δ da atmosfera terrestre pode ser aproximada por $\delta(x,y,z) = 1.225 - 0.000113z\ Kg/m^3$. Calcule uma aproximação da massa total da região da atmosfera que tenha a forma de um cubo com 1Km de aresta e uma das faces apoiada na superfície da terra.

22. Determine a área das superfícies descritas nas alíneas seguintes.

    (a) A parte do plano $z = 2 + 3x + 4y$ que está acima do rectângulo $[0,5] \times [1,4]$.

    (b) A parte do plano $2x + 5y + z = 10$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

    (c) A parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

    (d) A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

    (e) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$ e acima do plano xy.

    (f) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

Dados

1. Considere uma lâmina colocada numa região D cuja densidade (em unidades de massa por unidade de área) no ponto (x, y) em D é dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua sobre D. Então:

   (a) A massa total da lâmina é dada por

   $$m = \int\int_D \rho(x, y)\ dA$$

   (b) As coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ do centro da massa são

   $$\overline{x} = \frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x, y)\ dA \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\int\int_D y\rho(x, y)\ dA$$

2. Se a função densidade de um objecto sólido que ocupa a região E do espaço é $\rho(x, y, z)$, em unidades de massa por unidade de volume no ponto (x, y, z), então a sua massa é:

   $$m = \int\int\int_E \rho(x, y, z)\ dV$$

   e as coordenadas do centro de massa são

   $$\overline{x} = \frac{1}{m}\int\int\int_E x\rho(x, y, z)\ dV, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\int\int\int_E y\rho(x, y, z)\ dV$$

   $$\text{e} \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\int\int\int_E z\rho(x, y, z)\ dV$$

3. A área da superfície de equação $z = f(x, y),\ (x, y) \in D$, onde f_x e f_y são funções contínuas, é

   $$A(S) = \int\int_D \sqrt{(f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2 + 1}\ dA.$$