

Departamento: Matemática

Complementos de Análise Matemática

Curso: Engenharia de Sistemas e Informática

Ano: 4º

Semestre: 1º

Ano Lectivo: 2005/2006

Ficha prática nº3 - Equações Diferenciais

1. Determine as equações diferenciais das seguintes famílias de linhas:

- | | |
|------------------------------|------------------------------------|
| (a) $y = cx$ | (b) $y = cx^3$ |
| (c) $y = c_1 e^x + c_2$ | (d) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ |
| (e) $x^2 + y^2 = c^2, c > 0$ | (f) $x^2 + y^2 = cy$ |

2. Mostre que $y = ae^{-2x} + be^x + ce^{3x}$ é o integral geral da equação diferencial $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ onde a, b e c são constantes arbitrárias.

3. Verifique que $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$ é a solução geral da equação diferencial $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, onde C é uma constante arbitrária.

4. Determine uma solução particular satisfazendo as condições iniciais dadas:

- (a) $y' = y; y(0) = 3;$ (b) $y'' = e^x; y(1) = 1; y'(1) = 0.$

5. Determine m de tal forma que $y = e^{mx}$ seja o integral geral da equação $y'' - 9y = 0$.

6. Resolva as seguintes equações diferenciais:

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $xdy - ydx = 0$ | (b) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$ |
| (c) $2ydx + (xy + 5x)dy = 0$ | (d) $y' = x - 1 + xy - y$ |
| (e) $e^{x+2y}dx - e^{2x-y}dy = 0$ | (f) $y(1 + x^3)y' + x^2(1 + y^2) = 0$ |
| (g) $x \tan y - y' \sec x = 0$ | (h) $e^y \sin x dx - \cos^2 x dy = 0$ |

7. Determine a solução particular da equação diferencial que satisfaz as condições iniciais dadas.

- | | |
|---|---|
| (a) $2y^2y' = 3y - y'; x = 3, y = 1$ | (b) $xdy - (2x + 1)e^{-y}dx = 0; x = 1, y = 2$ |
| (c) $(xy + x)dx + \sqrt{4 + x^2}dy = 0; y(0) = 1$ | (d) $\cot x dy - (1 + y^2)dx = 0; x = 0, y = 1$ |

8. Resolva as seguintes equações diferenciais:

- | | |
|---|--|
| (a) $(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$ | (b) $(1 - 2xy + 3x^2y^2)dx = (x^2 + 3y^2 - 2x^3y)dy$ |
| (c) $(x^2 \cos y + 4y)y' + 2x \sin y = -5$ | (d) $e^{xy}(xy + 1)dx + (x^2e^{xy} + 2y)dy = 0$ |
| (e) $(\sin^2 \theta + 2r \cos \theta)dr + r(\sin 2\theta - r \sin \theta)d\theta = 0$ | (f) $(e^{-x} \cos y - 2x)dx + e^{-x} \sin y dy = 0$ |
| (g) $(x - yx^{-1} + \ln y) + (xy^{-1} - \ln x)y' = 0$ | (h) $y \cos x dx + (\sin x - \sin y)dy = 0$ |

9. Determine a solução particular da equação diferencial que satisfaz as condições iniciais dadas.

(a) $(2xy^3 + 8x)dx + (3x^2y^2 + 5)dy = 0$; $y = -1$ para $x = 2$

(b) $\left(ye^{2x} + \frac{y}{1+4y^2}\right)dy + (y^2e^{2x} - 1)dx = 0$; $y(0) = 1/2$

(c) $(x \cos x + \sin x + y)dx + (\sin y + x)dy = 0$; $y(\pi/6) = \pi/2$

10. Resolva as equações diferenciais seguintes:

(a) $(x + 3y)dx + xdy = 0$

(b) $\left(y \sin \frac{y}{x} + x \cos \frac{y}{x}\right)dx - x \sin \frac{y}{x}dy = 0$

(c) $(x^2 + y^2)dx - x^2dy = 0$

(d) $y' = x^3/(4x^3 - 3x^2y)$

(e) $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx = xdy$

(f) $(x + y)dx = (x - y)dy$

11. Resolva as equações diferenciais seguintes mediante a substituição $x = vy$.

(a) $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$

(b) $y^2dx + x(x - y)dy = 0$

(c) $3ydx + (x + 2y)dy = 0$

12. Mostre que cada uma das equações diferenciais seguintes é simultaneamente homogénea e exacta e resolva-as.

(a) $(x + 3y)dx + (3x - 2y)dy = 0$

(b) $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

13. Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

(a) $y' + 2y = e^{2x}$

(b) $xy' - 3y = x^5$

(c) $xy' + y + x = e^x$

(d) $x^2dy + (2xy - e^x)dx = 0$

(e) $y' + y \cot x = 4x^2 \csc x$

(f) $(y \sin x - 2)dx + \cos x dy = 0$

(g) $(x^2 \cos x + y)dx - xdy = 0$

(h) $xy' + (2 + 3x)y = xe^{-3x}$

(i) $xy' - y = x^3y^4$

(j) $(2xy - x^2y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

(k) $x^{-1}y' + 2y = 3$

(l) $\tan x dy + (y - \sin x)dx = 0$

14. Nos exercícios seguintes determine a solução particular da equação diferencial que satisfaz as condições iniciais indicadas.

(a) $xy' - y = x^2 + x$; $y(1) = 2$

(b) $xy' + y + xy = e^{-x}$; $y(1) = 0$

(c) $y' + 2xy - e^{-x^2} = x$; $y(0) = 1$

15. Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

(a) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$

(b) $xy' + y = \frac{1}{y^2}$

(c) $\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

(d) $x^2y' + y^2 = xy$

16. A equação

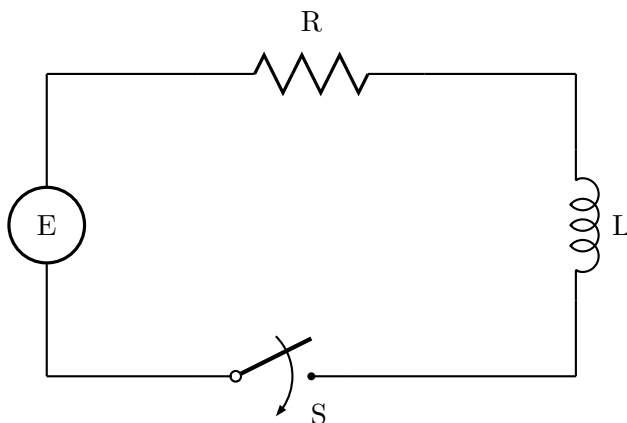
$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E$$

descreve a carga Q em um condensador de capacidade C durante um processo de carga envolvendo uma resistência R e uma força electromotriz E . Se a carga é 0 quando $t = 0$, expresse Q como função de t .

17. Um circuito eléctrico simples consiste numa resistência R e num indutor L ligados em série, conforme ilustração esquemática na Figura 1, onde E é uma força electromotriz constante. Fechando-se o interruptor S em $t = 0$, decorre das leis da electricidade que, para $t > 0$, a corrente i verifica a equação diferencial

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Expresse i como função de t .



18. Resolva o problema anterior no caso de a força electromotriz ser dada por $E \sin \omega t$, E e ω constantes.
19. A equação $R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dE}{dt}$ descreve um circuito eléctrico consistindo numa resistência R e num condensador C em série. Expresse i em função de t se $i = i_0$ quando $t = 0$ e
- E é uma constante;
 - $E = E \sin \omega t$, com E e ω constantes.
20. Uma bateria de 12 volts está ligada a um circuito no qual a auto-indução é $1/2$ henry e a resistência é 10 ohms. Portanto, a corrente i satisfaz a equação

$$\frac{1}{2} \frac{di}{dt} + 10i = 12.$$

Determine a corrente i se a corrente inicial for zero.

21. A velocidade do movimento vertical de um objecto lançado da superfície terrestre é dada por $v(x)$ onde x é, em cada instante t , a distância do objecto à superfície terrestre. Sabe-se que v satisfaz a equação diferencial seguinte

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{GM}{(x + R)^2}$$

onde G é a constante gravitacional e M e R são a massa e o raio da terra, respectivamente. Sabendo que no instante inicial a velocidade é V , determine v em função de x .

22. Sabe-se que uma determinada população aumenta proporcionalmente ao número de indivíduos num determinado momento, isto é, $\frac{dP}{dt} = kP(t)$, em que $P(t)$ é o número de indivíduos existentes no instante t e k é a constante de proporcionalidade.

Suponha que a população duplicou no espaço de 5 anos e determine ao fim de quantos anos a população será o triplo da inicial. E o quádruplo?

23. Suponha que tem, no instante $t = 0$, 100mg de um material radioactivo e que este começa a desintegrar-se. Ao fim de 6 horas a massa diminuiu 3mg. Sabendo que a taxa de desintegração é, em cada momento, proporcional à massa nesse instante, determine que massa restará ao fim de 24 horas. E qual o tempo necessário para a massa ser menor que 1mg?

24. *Lei de Newton do arrefecimento/aquecimento dos corpos* - De acordo com esta lei, a taxa de variação de temperatura de um corpo varia proporcionalmente com a diferença entre a temperatura desse corpo e a do meio que o envolve, que designamos por temperatura ambiente. Se representarmos por $T(t)$ a temperatura do corpo no instante t e por T_m a temperatura ambiente então este fenómeno obedece à equação diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_m) ,$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Suponha que um termómetro marca a temperatura ambiente num determinado espaço e que o transporta para outro, onde a temperatura é de 5°. Passado 1min, o termómetro marca 55° e passados 5min marca 20°. Qual era a temperatura do espaço de onde foi retirado o termómetro?

25. Um recipiente está parcialmente cheio com 100lts de uma solução onde estão dissolvidos 5Kgs de sal. No instante $t = 0$, são abertas duas torneiras: uma delas introduz 6lts/min de líquido no recipiente contendo 250 gramas de sal por litro e a outra, aberta no fundo do recipiente, retira 6lts/min de líquido. Suponha que em cada momento, todo o sal está uniformemente distribuído pelo líquido. A quantidade de sal, $A(t)$, presente na solução satisfaz a equação diferencial $\frac{dA}{dt} = T_e - T_s$, onde T_e é a quantidade de sal (por minuto) que entra e T_s é a quantidade de sal que sai (por minuto).

(a) determine T_s em cada instante t ;

(b) determine a quantidade de sal contida no tanque ao fim de 30min.

26. No instante $t = 0$ um avião está na posição $B(1000,0)$ iniciando uma viagem para ir aterrar no aeroporto A . A localização do avião é dada em cada instante $t = 0$ pelo par $(x(t), y(t))$. Considerando y como função de x , o movimento do avião é modelado pela seguinte equação diferencial, onde w e b são constantes:

$$bxdy = (by - w\sqrt{x^2 + y^2}) dx.$$

Determine y em função de x .

27. Resolva as equações diferenciais sujeitas às condições iniciais indicadas.

(a) $x^2y' - 2xy = 3y^4$, $y(1) = \frac{1}{2}$ (b) $xy(1 + xy^2)\frac{dy}{dx} = 1$, $y(1) = 0$

28. Resolva as equações diferenciais seguintes, usando a técnica que achar conveniente:

(a) $(x^2 - yx^2)y' = y$ (y função de x) (b) $vt\frac{dv}{dt} - k = 0$ (v função de t , k const.)
(c) $xy' + y(1 - y^{-3}) = 0$ (y função de x) (d) $5s\frac{dQ}{ds} + \frac{Q}{2} = s$ (Q função de s)
(e) $(x \tan \frac{x}{y} + y \cot \frac{x}{y})dx = x \cot \frac{x}{y}dy$ (y função de x)

29. Sabendo que $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ (onde c_1 e c_2 representam constantes) é a solução geral da equação $y'' - y = 0$ em todo o $\mathbb{R}$,

- (a) determine a solução particular que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
(b) determine uma solução particular que satisfaça as condições de fronteira $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

30. Sabendo que $y = c_1e^x \cos x + c_2e^x \sin x$ (onde c_1 e c_2 representam constantes) é a solução geral da equação $y'' - 2y' + 2y = 0$ em todo o $\mathbb{R}$, determine se existe alguma(s) solução (ões) que satisfaçam as condições:

(a) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (b) $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$
(c) $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 1$ (d) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

31. Sabendo que $y = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$ (onde c_1 e c_2 representam constantes) é a solução geral da equação $y'' + \lambda^2 y = 0$, determine os valores de λ para os quais o problema de valores de fronteira

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

tem soluções não triviais.

32. Em cada uma das alíneas seguintes, determine se as funções são ou não linearmente independentes em $\mathbb{R}$.

(a) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 4x - 3x^2$
(b) $f_1(x) = 5$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \sin^2 x$
(c) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = x + 3$
(d) $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$

33. Em cada uma das alíneas seguintes mostre que as funções dadas são linearmente independentes no intervalo indicado, usando o Wronskiano.

(a) $x^{1/2}$, x^2 ; $-\infty < x < \infty$ (b) e^x , e^{-x} , e^{4x} ; $-\infty < x < \infty$

34. Verifique que para as funções $f_1(x) = 2$ e $f_2(x) = e^x$

$$1 \cdot f_1(0) - 2 \cdot f_2(0) = 0.$$

Será que podemos concluir que f_1 e f_2 são linearmente dependentes em qualquer intervalo que contenha $x = 0$?

35. Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que as funções dadas formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial no intervalo indicado. Indique a solução geral.

- (a) $y'' - y' - 12y = 0$; e^{-3x} , e^{4x} , $-\infty < x < \infty$
- (b) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $e^x \cos 2x$, $e^x \sin 2x$, $-\infty < x < \infty$
- (c) $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$; x^3 , x^4 , $0 < x < \infty$
- (d) $x^3 y''' - 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$; x , x^{-2} , $x^{-2} \ln x$, $0 < x < \infty$

36. Determine as soluções gerais das equações diferenciais dadas.

- (a) $3y'' - y' = 0$
- (b) $y'' = 16y$
- (c) $y'' + 9y = 0$
- (d) $y'' - 3y' + 2y = 0$
- (e) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$
- (f) $y'' + 3y' = 5y$
- (g) $12y'' - 5y' = 2y$
- (h) $y'' - 4y' + 5y = 0$
- (i) $3y'' + 2y' + y = 0$
- (j) $y''' - 4y'' = 5y'$
- (k) $y''' = y$
- (l) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$
- (m) $y''' + y'' = 2y$
- (n) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
- (o) $\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$
- (p) $16\frac{d^4 y}{dx^4} + 24\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 0$
- (q) $\frac{d^5 y}{dx^5} - 16\frac{dy}{dx} = 0$
- (r) $\frac{d^5 y}{dx^5} + 5\frac{d^4 y}{dx^4} - 2\frac{d^3 y}{dx^3} - 10\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 5y = 0$

37. Resolva as equações diferenciais sujeitas às condições iniciais dadas:

- (a) $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$
- (b) $y'' + 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$
- (c) $2y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$
- (d) $y'' + y' + 2y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$
- (e) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$
- (f) $y''' + 12y'' + 36y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -7$
- (g) $y''' - 8y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$
- (h) $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$

38. As raízes da equação auxiliar de uma equação diferencial linear homogénea são $m_1 = 4$, $m_2 = m_3 = -5$. Qual é a equação diferencial?

39. Em cada uma das alíneas seguintes, determine uma equação diferencial linear de coeficientes constantes que tenha as soluções dadas.

- (a) $4e^{6x}$, $3e^{-3x}$
- (b) 3 , $2x$, $-e^{7x}$

40. Resolva as equações diferenciais seguintes.

(a) $y'' - 9y = 54$

(b) $y'' + y' = 3$

(c) $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

(d) $y''' + y'' = 8x^2$

(e) $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

(f) $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$

(g) $y'' + 25y = 6 \sin x$

(h) $y'' + 6y' + 9y = -e^{4x}$

(i) $y'' - y = x^2 e^x + 5$

(j) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin x$

(k) $y'' + 25y = 20 \sin 5x$

(l) $y'' + y' + y = x \sin x$

(m) $y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$

(n) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

(o) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$

(p) $16y^{(4)} - y = e^{x/2}$

41. Resolva as equações diferenciais seguintes sujeitas às condições iniciais dadas.

(a) $y'' - 64y = 16; y(0) = 1, y'(0) = 0$

(b) $y'' + y' = x; y(0) = 1, y'(0) = 0$

(c) $y'' - 5y' = x - 2; y(0) = 0, y'(0) = 2$

(d) $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}; y(0) = 1, y'(0) = 1$

(e) $y'' + y' = 8 \cos 2x - 4 \sin x; y(\pi/2) = -1, y'(\pi/2) = 0$

(f) $y'' - 4y' + 8y = x^3; y(0) = 2, y'(0) = 4$

42. Observe a figura seguinte. Na posição de equilíbrio, o peso $W = mg$ do corpo é compensado com a força da mola. A condição de equilíbrio é dada por $mg = ks$, onde m representa a massa do corpo, g a aceleração da gravidade $9.8m/seg^2$ e s a distância do ponto de equilíbrio ao ponto inicial, quando a mola está em repouso.

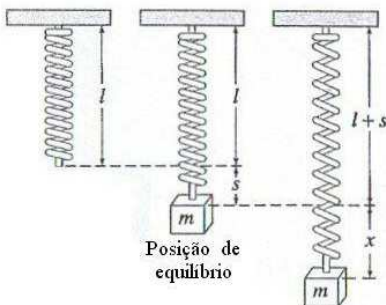


Figura 1: Sistema “mola-massa”.

Este sistema “mola-massa” está livre de forças exteriores (à excepção da gravidade) e obedece à equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0, \quad \text{onde } w^2 = \frac{k}{m}.$$

Suponha que prende um corpo com um peso de 12kg à extremidade solta de uma mola e que esta estica 10cm. Determine a equação do movimento se o corpo for libertado, com velocidade nula, 6cm acima do ponto de equilíbrio.