Departamento: Matemática **Complementos de Análise Matemática**

Curso: Engenharia de Sistemas e Informática **Ano:** 4º **Semestre:** 1º **Ano Lectivo:** 2005/2006

Ficha prática nº4 - Transformadas de Laplace
Equações e Sistemas de Equações Diferenciais

1. Em cada uma das alíneas seguintes, determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

   (a) $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$

   (c) $f(t) = e^{t+7}$ (d) $f(t) = e^{4t}$

2. Determine $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para cada uma das funções f.

   (a) $f(t) = 2t^4$ (b) $f(t) = t^2 + 6t - 3$
   (c) $f(t) = (t+1)^3$ (d) $f(t) = e^t \sinh t$

3. A função gama define-se por meio do integral

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \qquad \alpha > o\,.$$

   Mostre que

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1\,.$$

4. Nas alíneas seguintes, use o resultado do exercício anterior para determinar $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

   (a) $f(t) = t^{-1/2}$ (b) $f(t) = t^{1/2}$

5. Nas alíneas seguintes, determine a transformada inversa, usando transformadas inversas de outras funções.

   (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$
   (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s-3}\right\}$ (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right\}$
   (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)(s+2)}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}\right\}$

6. A transformada inversa de Laplace pode não ser única. Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0,\, t \neq 1,\, t \neq 2 \\ 3, & t = 1 \\ 4, & t = 2 \end{cases}\,.$$

7. Nas alíneas seguintes determine $F(s)$ ou $f(t)$, consoante o indicado.

   (a) $\mathcal{L}\{te^{10t}\}$ (b) $\mathcal{L}\{e^t \sin 3t\}$
   (c) $\mathcal{L}\{t(e^t + e^{2t})^2\}$ (d) $\mathcal{L}\{e^{-t} \sin^2 t\}$
   (e) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+4s+5}\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s+1)^2}\}$
   (g) $\mathcal{L}\{\ (t-1)\mathcal{U}(t-1)\}$ (h) $\mathcal{L}\{\ \cos 2t\mathcal{U}(t-\pi)\}$
   (i) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\}$ (j) $\mathcal{L}\{t^2 \sinh t\}$
   (k) $\mathcal{L}\{te^{2t} \sin 6t\}$ (l) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\}$

8. Nas alíneas seguintes escreva as funções dadas em termos da função de passo unitário. Determine a transformada de Laplace de cada função.

   (a) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 3 \\ -2, & t \ge 3 \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t^2, & t \ge 1 \end{cases}$

   (c) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$ (b) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 \\ 0, & 4 \le t < 5 \\ 1, & t \ge 5 \end{cases}$

9. Nas alíneas seguintes, calcule a transformada de Laplace indicada.

   (a) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau\right\}$ (b) $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau\right\}$
   (c) $\mathcal{L}\left\{t \int_0^t \sin \tau d\tau\right\}$ (d) $\mathcal{L}\left\{1 * t^3\right\}$
   (e) $\mathcal{L}\left\{t^2 * t^4\right\}$ (f) $\mathcal{L}\left\{e^{-t} * e^t \cos t\right\}$

10. Nas alíneas seguintes, use a igualdade $f * g = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}$ para determinar $f(t)$

    (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}$

11. (a) Mostre que se $f(t)$ é seccionalmente contínua e periódica de período T, então

    $$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt\,.$$

    (b) Determine a transformada de Laplace das seguintes funções periódicas.

    (i) $f(t) = \sin t$ (ii) $f(t) = \cos t$
    (iii) f é definida em cada intervalo $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}_0$, por $f(t) = t - n$.

12. Prove a propriedade comutativa do integral de convolução $f * g = g * f$.

13. Prove a propriedade distributiva do integral de convolução $f * (g + h) = f * g + f * h$.

14. Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, mostre que

    $$\mathcal{L}\{f(t) \cosh at\} = \frac{1}{2}[F(s-a) + F(s+a)]\,.$$

15. Use o resultado do exercício anterior para determinar $\mathcal{L}\{\sin kt \cosh at\}$.

16. Nas alíneas seguintes, use a transformada de Laplace para resolver a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas. Se possível, escreva f em termos de funções de passo unitário.

    (a) $\frac{dy}{dt} - y = 1$, $y(0) = 0$
    (b) $y' + 4y = e^{-4t}$, $y(0) = 2$
    (c) $y'' + 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
    (d) $y'' - 6y' + 9y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
    (e) $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
    (f) $y'' + y = \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
    (g) $y'' - y' = e^t \cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
    (h) $2y''' + 3y'' - 3y' - 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$
    (i) $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$
    (j) $y' + y = f(t)$, onde $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 5, & t \ge 1 \end{cases}$, $y(0) = 0$
    (k) $y' + 2y = f(t)$, onde $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$, $y(0) = 0$
    (l) $y'' + 4y = f(t)$, onde $f(t) = \sin t\,\mathcal{U}(t - 2\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

17. Use a transformada de Laplace para resolver as seguintes equações integrais.
    (a) $f(t) + \int_o^t (t - \tau) f(\tau) d\tau = t$ (b) $f(t) = te^t + \int_o^t \tau f(t - \tau) d\tau$

18. Recorde que a equação para a corrente $i(t)$ num circuito em série contendo uma auto-indução e uma resistência é
$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)\,,$$
onde $E(t)$ é a voltagem aplicada. Use a transformada de Laplace para determinar a corrente $i(t)$ quando $i(0) = 0$, $L = 1$, $R = 10$ e
$$E(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & t \ge \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

19. Recorde que quando um circuito em série contém uma auto-indução, uma resistência, e um condensador, a equação diferencial para a carga instantânea $q(t)$ no condensador é dada por
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)\ .$$
Determine a carga $q(t)$ se $L = 1$, $R = 20$, $C = 0.01$, $E(t) = 120 \sin 10t$, $q(0) = 0$. Qual a corrente $i(t)$, supondo $i(0) = 0$?

20. Resolva as seguintes problemas de valor inicial.

    (a) $y' - 3y = \delta(t-2)$, $y(0) = 0$
    (b) $y'' + y = \delta(t-2\pi)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
    (c) $y'' + y = \delta(t-\pi/2) + \delta(t-3\pi/2)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
    (d) $y'' + 2y' = \delta(t-1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

21. Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais.

    (a) $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -y + t \\ \frac{dy}{dt} = x - t \end{array}$

    (c) $\begin{array}{l} (D^2+5)x - 2y = 0 \\ -2x + (D^2+2)y = 0 \end{array}$ (d) $\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = 4y + e^t \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 4x - e^t \end{array}$

22. Use a transformada de Laplace para resolver os seguintes sistemas de equações diferenciais:

    (a) $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = 2x, \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y, \\ x(0) = -1,\ y(0) = 2 \end{array}$

    (c) $\begin{array}{l} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = 1 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x - 3y = 2, \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{array}$ (d) $\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} + x - y = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + y - x = 0, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = -2 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{array}$

    (e) $\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = t^2 \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} = 4t, \\ x(0) = 8,\ x'(0) = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{array}$ (f) $\begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 3y = 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 3y = te^{-t}, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2 \\ y(0) = 0 \end{array}$

23. Considere o sistema de equações diferenciais seguinte que descreve as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ numa rede eléctrica contendo uma resistência, um indutor e um condensador:

    $$\begin{array}{l} L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t) \\ RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0\ . \end{array}$$

    Resolva este sistema supondo $E = 60$, $L = 1$ $R = 50$, $C = 10^{-4}$, e que i_1 e i_2 são inicialmente zero.

24. O sistema de equações diferenciais seguinte descreve as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ numa rede eléctrica. Resolva o sistema para $R = 5$, $L_1 = 0.01$, $L_2 = 0.0125$, $E = 100$, $i_1(0) = 0$ e $i_2(0) = 0$.

    $$\begin{array}{l} L_1\frac{di_1}{dt} + Ri_1 + Ri_2 = E(t) \\ L_2\frac{di_2}{dt} + Ri_1 + Ri_2 = E(t)\ . \end{array}$$

25. Determine a solução geral de cada um dos seguintes sistemas de equações diferenciais

(a) $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{array}$

(b) $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -4x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = y - 3z \end{array}$

(c) $X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X$

(d) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$

(e) $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{array}$

(f) $X' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X$

(g) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} X$

(h) $\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = 2y \\ \frac{dz}{dt} = y - z \end{array}$