DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA - INSTITUTO POLITÉCNICO DE VISEU

Complementos de Análise Matemática - Eng. de Sistemas e Informática

2004/2005 $1^{\underline{o}}$ semestre

Ficha Teórico-Prática $\mathrm{n}^{\underline{o}}$ 5

Séries

Recorde que uma série é uma expressão da forma

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

Se $k=1$, temos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$$

Esta soma infinita só tem significado se a sucessão das somas

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_2, \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ ...$$

for convergente. Nesse caso, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Seja, por exemplo, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0.1^n; \tag{1}$$

trata-se de uma série geométrica e, como é sabido, a soma S_n de todos os termos até ao de ordem n é dada por

$$S_n = \frac{1-0.1^{n+1}}{1-0.1}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0.1^{n+1}}{1-0.1} = 1/0.09,$$

conclui-se que a série (1) é convergente e a sua soma é 1/0.09.

Em geral, não é fácil determinar a sucessão das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e do seu limite. Por isso, para determinar se uma dada série é ou não convergente usam-se os chamados testes de convergência, que foram estudados na disciplina de Análise Matemática I, e que são descritos na tabela das séries numéricas. Recorde, por exemplo, que

$$\textit{se} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ \textit{é convergente então} \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Exercícios.

1. Com a ajuda da Tabela dos testes de convergência, determine a natureza das seguintes séries e se possível a sua soma:

a) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left[1+(-1)^k\right];$ **b)** $3 + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{3}{4^{n-1}} + \cdots;$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$; **d)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1}$;

e) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$; **f)** $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, t^{2k}$, $0 < |t| < 1$.

Recorde a propriedade seguinte:

Dadas duas séries $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=k}^{+\infty} b_n$*,*

(a) se ambas são convergentes, a série $\sum_{n=k}^{+\infty} (a_n + b_n)$ *é convergente;*

(b) se uma converge e a outra diverge a série $\sum_{n=k}^{+\infty} (a_n + b_n)$ *é divergente.*

Exercícios.

2. Determine a natureza das seguintes séries:

   a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$; **b)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{4}{n}\right]$.

3. Arranje um exemplo de duas séries divergentes cuja soma seja convergente.

4. Arranje um exemplo de duas séries divergentes cuja soma seja divergente.

Recorde que

toda a série absolutamente convergente é convergente.

Uma série alternada é uma série da forma

$$\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \left(\text{ou} \quad \sum_{n=k}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n\right)$$

onde $a_n > 0$ para todos os n's. Para que ela seja convergente é condição suficiente que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja decrescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Nesse caso, o erro cometido ao aproximarmos a soma S da série pela soma parcial de ordem n, S_n, é numericamente inferior a a_{n+1}, ou seja,

$$|S - S_n| < a_{n+1}\,.$$

Exercícios.

5. Determine se cada uma das seguintes séries numéricas é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente [1]:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^{n+1}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-3)^n}{2^{n+1}}\right)$

[1] Recorde que, para $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

6. Obtenha uma aproximação com três casas decimais da soma de cada série:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{5^n}$

Recorde que:

Uma série de potências é uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{2}$$

onde cada a_n é uma constante e x é uma variável.

Para uma série de potências da forma (2) *exactamente uma das seguintes afirmações é verdadeira:*

(a) A série converge só para $x = x_0$.

(b) A série converge absolutamente para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(c) A série converge absolutamente para todo o $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ e diverge para $x \in \mathbb{R}\backslash[x_0 - r, x_0 + r]$.

Exercícios.

7. (a) Determine o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-n)^n}{(n)!}(x+1)^n .$$

(b) Aproveite o resultado da alínea anterior para estudar a convergência da seguinte série numérica:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}} - \frac{(-n)^n}{(n)!}\frac{1}{3^n}\right).$$

8. Determine $a,\, b \in \mathbb{R}$ tais que a série seguinte seja convergente para $x \in]a, b[$ e divergente para $\mathbb{R} - [a, b]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{x^n n!}{n^n}\right)$$

9. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

a) Determine o domínio de definição de f.

b) Calcule $f(-1)$.

10. Seja $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(y-1)^n$.

a) Determine o domínio de definição de f.

b) Calcule $f(-1, 1/2)$.

Derivação e integração de funções definidas por séries: *Seja f uma função representada por uma série de potências,*

$$f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n \,,$$

de raio de convergência não nulo r. Então:

(a) A função f é diferenciável no intervalo $(x_0 - r,\, x_0 + r)$ e a sua derivada é dada por

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[a_n(x - x_0)^n]$$

nesse intervalo, sendo r o raio de convergência da série assim obtida.

(b) A primitiva de f no intervalo $(x_0 - r,\, x_0 + r)$ é

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n(x - x_0)^n \, dx + C,$$

tendo a última série raio de convergência igual a r r.
Para α e β no intervalo $(x_0 - r,\, x_0 + r)$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_n(x - x_0)^n \, dx.$$

Se uma função f tem derivadas de todas as ordens num ponto x_0 então a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

chama-se *série de Taylor para f relativa ao ponto x_0*. Quando $x_0 = 0$, obtemos a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

que se diz *série de Maclaurin de f.*

Se uma função f tem derivadas de todas as ordens no intervalo $(x_0 - r,\, x_0 + r)$ e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{3}$$

nesse intervalo, então a série em (3) é precisamente a série de Taylor de f relativa ao ponto x_0.

Desenvolvimento em série de Maclaurin de algumas funções

Desenvolvimento da exponencial: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Desenvolvimento do seno: $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1}$

Desenvolvimento do cosseno: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$

Desenvolvimento do seno hiperbólico: $\sinh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

Desenvolvimento do cosseno hiperbólico: $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$

Desenvolvimento de $\frac{1}{1-x}$: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$

Desenvolvimento binomial: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1)$

onde $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$

Exercícios.

11. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$; (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n$.

12. Relativamente à função $h(x) = \sum_{n=0} \infty \frac{(x-3)^n}{n^2}$, determine

(a) o domínio de definição;

(b) $h'(3)$ e $h^{(5)}(3)$.

13. Determine o intervalo de convergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{b^n}$, $b > 0$.

14. Obtenha o desenvolvimento de e^{3x-1} em

(a) potências de $x - 1/3$;

(b) potências de x.

15. Seja $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$, para $|x| < 1$. Usando a tabela acima, determine:

(a) o desenvolvimento em série de Maclaurin de f;

(b) o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno do ponto $x = 2$.

16. Usando um desenvolvimento já conhecido, obtenha o desenvolvimento em série de potências de x da função $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

17. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} .$$

(a) Determine o raio de convergência da série.

(b) Mostre que a série dada é a série de MacLaurin da função $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

(c) Use as alíneas anteriores para determinar a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$.

18. Escreva $\displaystyle\int \sin x^2 \, dx$ na forma de uma série de potências de x indicando o seu domínio de convergência.

19. (a) Exprima a primitiva de e^{-x^2} como uma série de potências de x.

(b) Exprima o integral definido $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx$ como uma série de potências de x.

(c) Obtenha uma aproximação numérica do integral da alínea anterior com erro inferior a 10^{-4}.

20. (a) Desenvolva a função $\ln(1+x)$ em série de potências de x.

(b) Obtenha uma aproximação de $\ln 1.2$ com erro inferior a 10^{-4}.

21. (a) Desenvolva em série de potências de x a função $\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$, indicando o seu raio de convergência.

(b) Indique, justificando, valores $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a série seguinte seja convergente para $x \in]a, b[$ e divergente para $x \in \mathbb{R} - [a, b]$ (onde k é uma constante):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2+1} - \frac{k(k-1)(k-2)...(k-n+1)}{n!2^n} x^n \right)$$

22. (a) Desenvolva em série de potências de x a função $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, indicando o seu raio de convergência.

(b) Use a alínea anterior e os seus conhecimentos sobre séries alternadas para obter uma aproximação de $\dfrac{1}{\sqrt{1.1}}$ com erro inferior a 10^{-3}.

23. Obtenha o desenvolvimento em série de potências de x das seguintes funções:

(a) $x^2 \cos \pi x$ (b) $(1-x^2)^{3/2}$ (c) $x \sinh 2x$

24. A velocidade do movimento de um objecto em queda no instante t é dada pela expressão

$$v(t) = e^{-ct/m}\left(v_0 + \frac{mg}{c}\right) - \frac{mg}{c}$$

onde m é a massa do objecto e v_0 é a velocidade inicial.

(a) Use uma série de Maclaurin para mostrar que se $ct/m \approx 0$, então a velocidade pode ser aproximada por

$$v(t) \approx v_0 - \left(\frac{cv_0}{m} + g\right) t.$$

(b) Melhore a aproximação feita na alínea anterior.

25. A magnitude da força gravitacional que a Terra exerce num objecto de massa m é

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

onde R é o raio da Terra e h é a altura do objecto acima da superfície terreste.

(a) Use a série binomial de $1/(1+x)^2$ para expressar F como uma série de potências de h/R.

(b) Mostre que se $h=0$ então $F=mg$.

(c) Mostre que se $h/R \approx 0$ então $F \approx mg - (2mgh/R)$. (Nota: A quantidade $2mgh/R$ pode ser considerada como o "termo de correcção"para o peso que do objecto relativo à altura acima da superfície terrestre.)

(d) Se considerarmos que a Terra é uma esfera de raio $R = 6350Km$ (ao nível do mar) qual é aproximadamente a percentagem de variação no peso de uma pessoa que vai da superfície ao nível do mar para o cimo do Monte Evereste (8 850 m)?

26. Usando a técnica do produto e divisão de séries determine o desenvolvimento em série de potências de x das seguintes funções:

(a) $e^{x^2} \sin x$ (b) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$