

Departamento: Matemática

Complementos de Análise Matemática

Curso: Engenharia de Sistemas e Informática

Ano: 4º

Semestre: 1º

Ano Lectivo: 2005/2006

Ficha prática nº6 - Séries de Fourier

1. Desenvolva em séries de Fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$ as seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ x & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$;

c) $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}(\pi-x) & \text{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$; d) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ -2 & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$.

2. Desenvolva em séries de senos no intervalo $[0, \pi]$ as seguintes funções:

(a) $f(x) = x^2$;

(b) $f(x) = \cos 2x$.

3. Determine o desenvolvimento em série de cossenos da função $f(x) = \sin x$ no intervalo $[0, \pi]$.

4. Utilize o desenvolvimento em série de senos da função $f(x) = 1$ no intervalo $[0, \pi]$ para calcular a soma da série

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

5. Utilize o desenvolvimento em série de Fourier da função $f(x) = x^2$ para calcular a soma da série

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

6. Determine o desenvolvimento em:

(a) série de Fourier da função $y = e^x$ no intervalo $[-l, l]$;

(b) série de cossenos da função $f(x) = 2x$ no intervalo $[0, 1]$;

(c) série de senos da função $f(x) = x$ no intervalo $[0, l]$.

7. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x \leq 1 \\ 2-x & \text{para } 1 < x < 2 \end{cases} .$$

Desenvolva-a no intervalo $[0, 2]$ em:

(a) série de senos;

(b) série de cossenos.

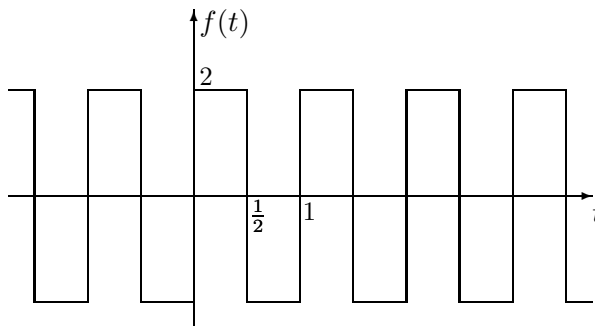
8. Seja g a função definida no intervalo $[0, 3]$ por $g(t) = t$ e h a função par e periódica, de período 6, que estende g a todo o $\mathbb{R}$.

(a) Esboce o gráfico de h .

(b) Sabendo que o desenvolvimento em série de Fourier de h é da forma

$\frac{3}{2} + \sum_{n=1} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{3} + b_n \sin \frac{n\pi t}{3} \right)$, onde $a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{12}{n^2\pi^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ para $n \geq 1$, obtenha o desenvolvimento em série de cossenos da função g no intervalo $[0, 3]$. Explícite as quatro primeiras parcelas (não nulas) dessa série.

9. Considere a função f periódica e ímpar representada pela figura



(a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier de $f(t)$.

(b) Diga, justificando, qual o valor da série determinada em (a) nos pontos $t = \frac{5}{4}$ e $t = 2$.

Dados:

O desenvolvimento em série de Fourier de uma função $f(t)$ de período T , caso exista, é dado por:

$$A_0 + \sum_{n=1} \left(A_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + B_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right), \quad \text{onde } A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{e}$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \quad \text{e} \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt \quad \text{para } n \geq 1.$$