1. Escreva os cubos de todos os inteiros de 2 a 60.
2. Escreva uma lista dos restos da divisão dos múltiplos de 3 entre 2 e 40 por 14.
3. Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ \frac{1}{i} : i \text{ é inteiro e } 1 \leq i \leq 50 \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{i^2} : i \text{ é inteiro não nulo e } -15 < i < 15 \right\}$$

$$C = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Determine

- (a) $A \cap B$;
 - (b) $B - A$;
 - (c) O conjunto 2^C , ou seja, potência de C .
4. Seja R a matriz da relação no conjunto $\{a, b, c, d\}$ dada por $\{(a, b), (a, c), (b, c), (c, a), (c, d)\}$.
 - (a) Introduza R .
 - (b) Calcule R^t , R^2 , R^3 e R^4 e, usando estas matrizes, obtenha a matriz do fecho simétrico e a matriz do fecho transitivo da relação dada.
 5. Introduza as funções

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \frac{x+1}{2}, \\ g(x) &= 2x - 1, \\ h(x) &= \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

Calcule ($\cdot$ designa a composição e f^k designa a composição de f k vezes):

- (a) $(f \cdot g)(x)$;
 - (b) $(f + h)(x)$;
 - (c) $(f \cdot g \cdot h)(\pi)$ e apresente o resultado com 5 casas decimais.
 - (d) $f^2(0.1)$
6. Averigue se:
 - (a) a função $f : \{0, 1, \dots, 17\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 17\}$ definida por

$$f(x) = (x^2 + 1) \bmod 7$$

é injectiva;

(b) a relação sobre o conjunto $\{1, \dots, 12\}$ constituída por todos os pares (x, y) tal que $x - y$ é múltiplo de 6 é ou não uma função;

(c) a função $g : \{0, 1, \dots, 9\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 9\}$ que a cada x faz corresponder o resto da divisão de x^2 por 10 é ou não sobrejectiva;

(d) se a relação

$R : \{1, 2, \dots, 20\} \times \{1, 2, \dots, 20\} \leftrightarrow \{q : q \text{ é um racional positivo menor ou igual a } 20\}$
tal que

$$(x, y)Rq \text{ sse } q = \frac{x}{y}$$

é ou não uma função.

7. Determine o valor do somatório

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

para $n=1, \dots, 15$.

8. Introduza a sucessão h definida recursivamente por:

$$\begin{aligned} h(1) &= h(2) = 1; \\ h(n) &= 2h(n-1) - h(n-2), \text{ para } n \geq 3. \end{aligned}$$

(a) Determine $h(8)$;

(b) determine os primeiros 15 termos da sucessão h .

9. Escreva todos os inteiros positivos para os quais $\sum_{i=0}^n i^3 < 120$.

10. Escreva todos os pares (x, x^5) onde x é um inteiro positivo e $x^5 < 100$.

11. Para cada inteiro i de 2 a 9, e $x = 2^i - 1$, escreva

$$\begin{cases} x, i, \text{ é primo,} & \text{se } x \text{ for primo} \\ x, i, \text{ não é primo,} & \text{se } x \text{ não for primo.} \end{cases}$$

12. Para n par de 2 a 18, escreva

$$\begin{cases} [n, 3], & \text{se } n \text{ for múltiplo de } 3 \\ [n, 5], & \text{se } n \text{ for múltiplo de } 5 \\ [n, 7], & \text{se } n \text{ for múltiplo de } 7 \\ [n, 0], & \text{para todos os outros } n\text{'s.} \end{cases}$$

13. (a) Use um procedimento **proc** para introduzir a definição recursiva da sucessão:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, f(2) = 2, f(3) = 3, \\ f(n) &= f(n-3) + f(n-2) + f(n-1), \text{ para } n \geq 4. \end{aligned}$$

- (b) Calcule os 30 primeiros termos da sucessão.
 (c) De entre os primeiros 40 termos da sucessão, escreva aqueles que são múltiplos de 7.

14. Desenhe o grafo

$$G = (\{b, c, d, f, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{b, g\}, \{b, h\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{f, g\}, \{g, h\}\}).$$

15. Seja H o grafo com pesos, cujos vértices e arestas são os mesmos que no exercício anterior, com os seguintes pesos para as arestas:

$$p(\{a, b\}) = 1, p(\{a, c\}) = 2, p(\{b, d\}) = 2, p(\{b, g\}) = 3, p(\{b, h\}) = 4, \\ p(\{d, f\}) = 2, p(\{d, g\}) = 4, p(\{f, g\}) = 1, p(\{g, h\}) = 3.$$

- (a) Determine uma árvore que dê um caminho mais curto do vértice b para o vértice h .
 (b) Determine a distância de b a h .

16. Introduza a operação lógica definida por $p \uparrow q := p \wedge \neg q$ e faça a sua tabela de verdade.

17. Averigue se $a \wedge b \vee \neg a \vee \neg b$ é ou não uma tautologia.

18. Averigue a veracidade das seguintes afirmações:

- (a) "Existe um inteiro x entre 3 e 15 tal que o resto da divisão de $x^3 - 2x^2 + 1$ por 11 é 5."
 (b) "Para todo o inteiro x de -20 a -10 , o número $x^4 - 2x + 1$ é maior do que 200." (Caso esta afirmação seja falsa, encontre os valores de x tais que $x^4 - 2x + 1$ não é maior do que 200.)