

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática
1ª Frequência - 17/05/2003

Duração: 2h

1. Considere as proposições d : “É um dia de sol.” e os predicados $p(x)$: “ x vai à praia.”
 v : “É um dia de Verão.” $s(x)$: “ x vai à serra.”
 $n(x, y)$: x e y são namorados.

Traduza as frases seguintes por meio de fórmulas lógicas bem formadas, considerando que o universo de discurso é um certo grupo de pessoas.

- (a) Se é um dia de Verão, é um dia de sol.
 - (b) Se é um dia de Verão então todos vão para a praia.
 - (c) É um dia de sol e há uma pessoa que não vai para a praia.
 - (d) Há dois elementos do grupo que são namorados, mas um deles vai para a praia e o outro vai para a serra.
 - (e) Quaisquer dois elementos do grupo que sejam namorados vão ambos para a praia ou ambos para a serra.
2. Defina tautologia e averigue se a fórmula bem formada $p \wedge (q \vee r \vee s) \rightarrow p \vee q \vee \neg r$ é ou não uma tautologia.
3. (a) Diga quando é que duas fórmulas bem formadas se dizem logicamente equivalentes.
- (b) Averigue se $p \wedge q$ e $\neg(p \rightarrow \neg q)$ são logicamente equivalentes.
- (c) Apresente uma interpretação que torne a fórmula bem formada $p(x) \wedge \exists y q(y) \rightarrow \forall x p(x)$ falsa.
- (d) Usando a alínea anterior que pode dizer sobre a afirmação “ $p(x) \wedge \exists y q(y) \vdash \forall x p(x)$ ”?
- (e) A “demonstração formal” seguinte está errada. Descubra o(s) erro(s):
- 1. $p(x) \wedge \exists y q(y)$ premissa
 - 2. $p(x)$ 1 e LS
 - 3. $\forall x p(x)$ 2 e IU
 - 4. $\exists y q(y)$ 1 e LS
 - 5. $\forall x p(x) \wedge \exists y q(y)$ 3, 4 e LC
4. Dados o conjunto $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ (onde $\emptyset$ designa o conjunto vazio),
- (a) indique os cardinais de A , A^3 e 2^A ;
 - (b) determine
 - (i) $A - \{\{\emptyset\}\}$,
 - (ii) $\{x, y\} \times (A - \{\{\emptyset\}\})$,
 - (iii) $A \cap \emptyset$,
 - (iv) $A \cap \{\{\emptyset\}\}$.
5. (a) Mostre que para quaisquer conjuntos A , B e C , se $A \cup B = A \cup C$ então $B - A = C - A$.
- (b) Arranje conjuntos A , B e C tais que $A \cup B = A \cup C$ mas $B \neq C$.
6. Considere no universo dos humanos as relações F , B e N definidas por
- xFy sse x é filho(a) de y
 - xBy sse x é irmã(o) de y
 - xNy sse x é neto(a) de y
- (a) Determine qual é a relação de parentesco dada por $F \cdot B$.
 - (b) Expresse a relação N em função de F .

V.S.F.F.

7. A relação R definida no conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$ é, relativamente à ordenação alfabética dos seus elementos, representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Escreva R sob a forma de conjunto de pares ordenados.
 - (b) Diga, justificando, se R é uma relação de ordem parcial (fraca) e, em caso afirmativo, desenhe o seu diagrama de Hasse.
 - (c) Determine a matriz da relação $R \cdot R$.
8. (a) Quando é que uma relação é uma função?
- (b) Quando é que uma função se diz injectiva?
- (c) Averigue se a função $f : \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = (2x) \bmod 6$ é ou não injectiva.

<u>Cotação:</u>	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
	3	1,5	5	1,5	2	1,5	3,5	2