Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática
1ª Frequência – 17/05/2003
Resolução

1. (a) $v \rightarrow d$
   (b) $v \rightarrow \forall x\, p(x)$
   (c) $d \wedge \exists \neg p(x)$
   (d) $\exists x \exists y\ (n(x,y) \wedge p(x) \wedge s(y))$
   (e) $\forall x \forall y\ (n(x,y) \rightarrow p(x) \wedge p(y) \vee s(x) \wedge s(y))$

2. Uma tautologia é ... [1]

   Quanto à fórmula bem formada $p \wedge (q \vee r \vee s) \rightarrow p \vee q \vee \neg r$: A implicação só é falsa se o antecedente for V e o consequente F. Ora, se a conjunção $p \wedge (q \vee r \vee s)$ tiver o valor lógico V, p tem também o valor lógico V. Mas então, como V é o elemento absorvente da disjunção, $p \vee q \vee \neg r$ é verdadeira. Concluimos assim que a fbf dada é uma tautologia.

3. (a) ... [1]
   (b) $p \wedge q$ toma o valor lógico V se e só se p e q têm ambas o valor lógico V.
   $\neg(p \rightarrow \neg q)$ toma o valor lógico V se e só se $p \rightarrow \neg q$ toma o valor lógico F, se e só se p é V e $\neg q$ é F, se e só se p é V e q é V.
   Consequentemente, $(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q))$ é uma tautologia, ou seja, $(p \wedge q)$ e $\neg(p \rightarrow \neg q))$ são logicamente equivalentes.
   (c) A interpretação

   Universo: números inteiros
   $p(x) := x$ é par.
   $q(x) := x$ é negativo.
   atribuição de uma constante à variável livre x: 2

   torna a fbf falsa.
   Com efeito, $p(2)$ é verdadeira e, como existem números inteiros negativos, $\exists y\, q(y)$ é também verdadeira, logo a conjunção $p(2) \wedge \exists y\, q(y)$ é verdadeira; nem todos os inteiros são negativos, pelo que $\forall x\, p(x)$ é falsa. Como $V \rightarrow F$ é F, conclui-se que a fbf toma o valor F.
   (d) A afirmação seria correcta se e só se $p(x) \wedge \exists y\, q(y) \rightarrow \forall x\, p(x)$ fosse uma tautologia. Pela alínea anterior, existe uma interpretação para a qual $p(x) \wedge \exists y\, q(y) \rightarrow \forall x\, p(x)$ é falsa. Logo $p(x) \wedge \exists y\, q(y) \rightarrow \forall x\, p(x)$ não é uma tautologia, e a afirmação "$p(x) \wedge \exists y\, q(y) \vdash \forall x\, p(x)$" não é correcta.
   (e) O erro está no terceiro passo: no passo 1, temos a premissa $p(x) \wedge \exists y\, q(y)$, onde x é uma variável livre, logo pendente; o passo 2 usa a premissa de 1, pelo que a variável x continua pendente; logo não se pode aplicar a introdução universal a $p(x)$.

4. (a) $\text{card} A = 3$, $\text{card}(A^3) = 3^3 = 27$, $\text{card}(2^A) = 2^3 = 8$.
   (b) (i) $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ (ii) $\{(x,\emptyset), (x,\{\{\emptyset\}\}), (y,\emptyset), (y,\{\{\emptyset\}\})\}$
   (iii) $\emptyset$ (iv) $\{\{\emptyset\}\}$

[1] ver "Notas Teóricas"

5. (a) Suponhamos que $A \cup B = A \cup C$. Então:

$$\begin{array}{lll}
A \cup B = A \cup C & \Rightarrow (A \cup B) \cap A^c = (A \cup C) \cap A^c & \\
 & \Leftrightarrow (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cup (C \cap A^c), & \text{usando a propriedade distributiva de } \cap \text{ em relação a } \cup \\
 & \Leftrightarrow \emptyset \cup (B \cap A^c) = \emptyset \cup (C \cap A^c), & \text{usando a lei da exclusão} \\
 & \Leftrightarrow B \cap A^c = C \cap A^c, & \text{porque } \emptyset \text{ é elemento neutro da } \cup \\
 & \Leftrightarrow B - A = C - A, & \text{por definição de diferença entre conjuntos}
\end{array}$$

(b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $C = \{1, 3, 4\}$

6. (a)

$$\begin{array}{ll}
xF \cdot By & \Leftrightarrow \exists z(xFz \wedge zBy) \\
 & \Leftrightarrow \text{existe } z \text{ tal que } x \text{ é filho(a) de } z \text{ e } z \text{ é irmã(o) de } y \\
 & \Leftrightarrow x \text{ é sobrinho(a) de } y
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ll}
xNy & \Leftrightarrow x \text{ é neto(a) de } y \\
 & \Leftrightarrow \exists z(xFz \wedge zFy) \\
 & \Leftrightarrow xF \cdot Fy
\end{array}$$

Logo $N = F \cdot F$.

7. (a) $R = \{(a, a), (e, e), (e, u), (i, a), (i, i), (o, a), (o, i), (o, o), (o, u), (u, u)\}$

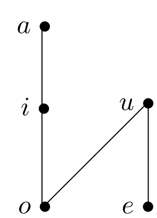
(b) R é:

1) reflexiva, porque tem todos os pares da forma (x, x) para $x \in V$;

2) anti-simétrica, porque para cada par (x, y) pertencente a R com $x \neq y$, (y, x) não pertence a R;

3) transitiva, porque sempre que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ também $(x, z) \in R$; dito doutro modo, porque $R \cdot R \subseteq R$.

Como R satisfaz estas três propriedades, é uma relação de ordem parcial. O seu diagrama de Hasse é:



(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. (a) ... [1]

(b) ... [1]

(c) $f(-1) = (-2) \text{mod} 6 = 4 = 4 \text{mod} 6 = f(2)$, logo f não é injectiva.

[1] ver “Notas Teóricas”