

Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática
2ª Frequência - 03/07/2003

Duração: 2h

1. Para cada uma das relações seguintes, diga se se trata ou não de uma função parcial. Em caso negativo, justifique a sua resposta; em caso afirmativo, indique o domínio.

(a) $R : \{1, 2, 3\} \leftrightarrow \{5, 4\}$
 $R = \{(2, 5), (3, 5)\}$

(b) $R : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Q}$
 $R = \{((m, n), q) : q = \frac{m}{n}\}$

(c) $R : \mathbb{Q} \leftrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
 $R = \{(q, (m, n)) : q = \frac{m}{n}\}$

2. Sabendo que A é um conjunto tal que existe uma função bijectiva $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, escreva na sua folha da prova a afirmação de entre as quatro seguintes que considera correcta:

$\text{card}(A) < \text{card}(\mathbb{N});$ $\text{card}(A) > \text{card}(\mathbb{N});$
 $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{N});$ $\text{card}(A)$ e $\text{card}(\mathbb{N})$ são incomparáveis.

3. Recorde que a sucessão de Fibonacci se define recursivamente por:

$f(0) = 0, f(1) = 1;$
 $f(n) = f(n-1) + f(n-2),$ para $n \geq 2$.

- (a) Determine $f(3)$.
- (b) Mostre que para todo o $n \geq 4$ se verifica a igualdade: $f(4n) = 3f(4n-3) + 2f(4n-4)$.
- (c) Prove por indução a propriedade: Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $f(4n)$ é múltiplo de 3.
4. Seja $A = \{a, e, r, s, t\}$.

- (a) Indique as seguintes strings sobre o conjunto A , onde $\cdot$ indica a operação de concatenação:
 $a \cdot \Lambda \cdot a, a \cdot t \cdot a, ra \cdot ra, r \cdot aa \cdot r.$

- (b) Uma *capicua* é uma string cuja leitura da direita para a esquerda é igual à leitura da esquerda para a direita. Por exemplo, *ata* e *raar* são capicuas sobre o alfabeto A . Defina recursivamente o conjunto das capicuas sobre o alfabeto A . (Considere a string vazia como sendo também uma capicua.)

5. (a) Defina nível de um vértice e altura de uma árvore binária.
- (b) Prove que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma árvore binária de altura n com exactamente $2^n - 1$ vértices.
6. Seja $B = \{0, 1, \frac{1}{2}\}$. Para cada árvore binária não vazia T , $r(T)$ designa a raiz de T . Vamos chamar *admissíveis* a todas aquelas árvores binárias sobre B definidas recursivamente por:
1. Se $a \in B$ então (a) é uma árvore admissível.
2. Se $a \in B$ e U e V são árvores admissíveis tais que $r(U) + r(V) = 1$ então a árvore (U, a, V) é admissível.

Apresente:

- (a) todas as árvores admissíveis de altura 2;
- (b) duas árvores admissíveis de altura 3;
- (c) duas árvores binárias sobre o conjunto B e de altura 3 que não sejam admissíveis.

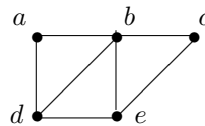
V.S.F.F.

7. Considere o digrafo $G = (V, E)$ onde $V = \{x, y, z, w\}$ e $E = \{(x, y), (x, z), (y, w), (z, y), (w, z)\}$.
- Desenhe o grafo G , colocando os vértices x e y numa mesma linha horizontal em cima e z e w numa mesma linha horizontal em baixo.
 - Qual a distância de x a w ? E de w a x ?
 - Indique a matriz de adjacências de G , considerando os vértices ordenados pela sua ordem alfabética, e denotando-a por A .
 - Sem calcular as matrizes diga, justificando, qual a entrada na posição 3,4 nas matrizes A^4 e A^5 .
8. Diga quando se diz que um caminho é elementar e mostre que um caminho elementar entre dois vértices diferentes num grafo de n vértices tem comprimento menor ou igual a $n - 1$.
9. Sabendo que G é um digrafo cuja matriz dos caminhos é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diga, justificando se o grafo é fortemente conexo, unilateralmente conexo ou fracamente conexo.

10. Considere o seguinte grafo não dirigido



- Diga, justificando, se o grafo tem algum ciclo de Euler.
- Indique uma árvore que seja um subgrafo do grafo dado e contenha todos os seus vértices.
- Considere agora o mesmo grafo com os seguintes pesos:
o peso de $\{a, b\}$ é 1; o peso de $\{a, d\}$ é 3; o peso de $\{b, c\}$ é 2; o peso de $\{b, d\}$ é 1;
o peso de $\{b, e\}$ é 7; o peso de $\{c, e\}$ é 3; o peso de $\{d, e\}$ é 5.
Descreva o algoritmo de Dijkstra para determinar a distância de a a e . (Considere que os vértices estão ordenados por ordem alfabética.)

Cotação para um total de 17 valores:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2	0,5	2	2	2	1,5	2	1	1,8	2,2