Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática
2ª Frequência - 03/07/2003 – Resolução (com comentários)

Os comentários ficam delimitados por $\|\lceil$ e $\rfloor\|$ e podem ajudar no estudo e compreensão das resoluções.

1. $\|\lceil$Importante: Antes de ler as respostas deve certificar-se de que sabe a definição de função parcial. Nas respostas, e de acordo com o pedido, não é dada justificação no caso em que se trata de uma função parcial. Deve assegurar-se de que é capaz de justificar.$\rfloor\|$

   (a) É uma função parcial. O domínio é $\{2,3\}$.

   (b) É uma função parcial. O domínio é $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$.

   (c) Não é uma função parcial porque existem elementos do conjunto de partida que estão relacionados com mais do que um elemento do conjunto de chegada; por exemplo, (2, $(2,1)$) e (2, $(4,2)$) são ambos pares da relação.

2. card(A)=card($\mathbb{N}$)

   $\|\lceil$Certifique-se de que sabe o que é o cardinal de um conjunto (finito ou infinito) e de que não tem dúvidas sobre qual é a resposta certa. Treine o seu domínio do conceito de cardinal tentando arranjar conjuntos B e C tais que card(B)<card($\mathbb{N}$) e card(C)>card($\mathbb{N}$).$\rfloor\|$

3. (a) $f(3) = f(2) + f(1) = f(1) + f(0) + f(1) = 1 + 0 + 1 = 2$.

   (b) Denotando por (R) a regra recursiva da definição de sucessão de Fibonacci, ou seja, a regra,

   $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, para $n \geq 3$,

   temos:

$f(4n)$	$= f(4n-1) + f(4n-2)$,	aplicando (R) a $f(4n)$,
	$= f(4n-2) + f(4n-3) + f(4n-3) + f(4n-4)$,	aplicando (R) a $f(4n-1)$ e a $f(4n-2)$
	$= 3f(4n-3) + 2f(4n-4)$	aplicando (R) a $f(4n-2)$ e somando

   (c) Para $n = 0$ a propriedade é válida porque $f(4 \times 0) = f(0) = 0$ e 0 é múltiplo de 3. Suponhamos a propriedade válida para um certo $n > 0$; temos então que, por hipótese indutiva, $f(4n)$ é múltiplo de 3. Queremos provar que $f(4(n+1))$ é múltiplo de 3.

   Ora,

$f(4(n+1))$	$= 3f(4(n+1)-3) + 2f(4(n+1)-4)$	usando a propriedade estabelecida em (b)
	$= 3f(4n+1) + 2f(4n)$.	

   Como $3f(4n{+}1)$ é um múltiplo de 3 (por ser o produto de 3 por um número inteiro) e $f(4n)$ é, por hipótese indutiva, um múltiplo de 3, concluimos que $3f(4n{+}1){+}2f(4n)$ é múltiplo de 3, ou seja, $f(4(n+1))$ é múltiplo de 3.

4. (a) $a \cdot \Lambda \cdot a = aa$, $a \cdot t \cdot a = ata$, $ra \cdot ra = rara$, $r \cdot aa \cdot r = raar$.

(b) 1. Λ é uma capicua.

2. Se S é uma capicua e $x \in A$ então $x \cdot S \cdot x$ e $S \cdot x \cdot S$ são capicuas.

Doutra forma:

1. Λ é uma capicua e, para cada $x \in A$, x é uma capicua.

2. Se S é uma capicua e $x \in A$ então $x \cdot S \cdot x$ é uma capicua.

$\|\lceil$Assegure-se de que percebeu a resposta.

Algumas pessoas responderam a esta pergunta do seguinte modo:

1. Λ é uma capicua.

2. Se S é uma capicua e $x \in A$ então $x \cdot S \cdot x$ é uma capicua.

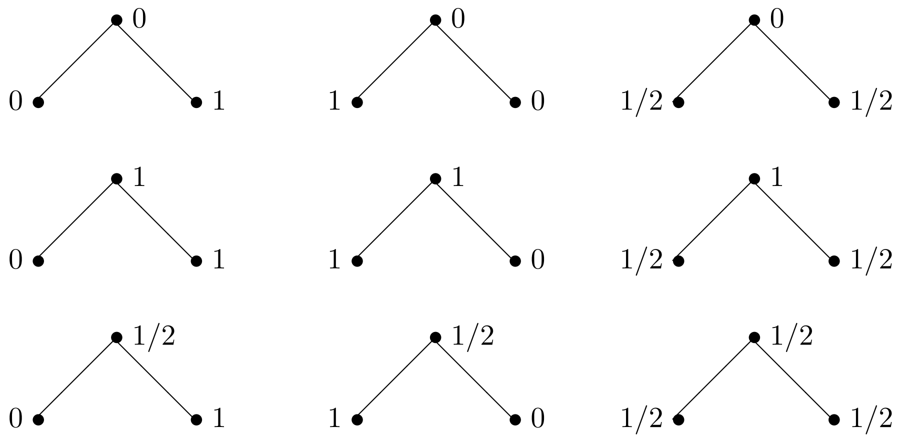
Verifique que esta definição s ó dá um certo tipo de capicuas (quais?) e não todas.$\rfloor\|$

5. ... [1]

6.

(a) $((0), 0, (1))$, $((1), 0, (0))$, $((1/2), 0, (1/2))$, $((0), 1, (1))$, $((1), 1, (0))$, $((1/2), 1, (1/2))$, $((0), 1/2, (1))$, $((1), 1/2, (0))$, $((1/2), 1/2, (1/2))$.

(Outra apresentação da resposta:

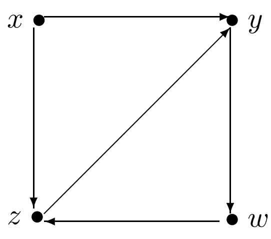


)

(b) Por exemplo, $(((1/2), 0, (1/2)), 0, (1))$ e $(((1/2), 1, (1/2)), 1, ((0), 1, (1)))$.

(c) Por exemplo, $(((1/2), 0, (1)), 0, (1))$ e $(((1), 1, (1/2)), 1, ((0), 1, (0)))$.

7. (a)



[1]Consulte as "Notas Teóricas" e os apontamentos das aulas teóricas.

(b) $d(x,w) = 2$ e $d(w,x) = \infty$.

(c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) A entrada na posição 3,4 em A^4 é igual ao número de caminhos de comprimento 4 de y para z, ou seja, 0.

A entrada na posição 3,4 em A^5 é igual ao número de caminhos de comprimento 5 de y para z. Como existe um (e só um) tal caminho, a saber, $< y, w, z, y, w, z >$, a entrada é 1.

8. ...[1]

9. $\|\lceil$Antes de ler a resposta assegure-se de que sabe as definições de caminho, matriz dos caminhos, conexidades fraca, unilateral e forte.$\rfloor\|$

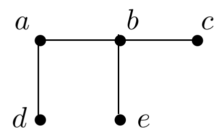
   Não é fortemente conexo porque não existe um caminho entre dois quaisquer vértices, por exemplo, não existe um caminho do 2º para o 3º vértice, visto que a entrada (2,3) da matriz é 0.

   Não unilateralmente conexo, porque, por exemplo, não existe nenhum caminho do 2º para o 3º vértice nem nenhum caminho do 3º para o 2º vértice, atendendo a que as entradas (2,3) e (3,2) da matriz são ambas nulas.

   É fracamente conexo, porque esquecendo as setas das arestas, obtemos um grafo não dirigido tal que dados quaisquer dois vértices u e v do grafo, existe um caminho de u para v. Com efeito, seja a o primeiro vértice, na ordenação considerada para os vértices. Então, atendendo a que a primeira linha da matriz é toda de 1's, o referido grafo não dirigido contém as arestas $\{u, a\}$ e $\{a, v\}$. Logo $< u, a, v >$ é um caminho de u para v.

10. (a) Um grafo não dirigido tem um ciclo de Euler se e só se for conexo e todos os seus vértices têm grau par. Como neste grafo alguns vértices têm grau ímpar, por exemplo, o vértice e tem grau 3, conclui-se que o grafo não tem nenhum ciclo de Euler.

    (b) (Uma resposta possível:)



    (c) 1. $L(a) = 0$
        2. $L(x) = \infty$, $x \neq a$
        3. $S = \emptyset$
        4. $e \notin S$
        5. $L(a) = \min_{x \notin S} L(x)$

[1]Consulte as "Notas Teóricas" e os apontamentos das aulas teóricas.

6. $S = \{a\}$
7. $L(b) = L(a) + p(a, b) = 1$, $L(d) = L(a) + p(a, d) = 3$
4. $e \notin S$
5. $L(b) = \min_{x \notin S} L(x) = 1$
6. $S = \{a, b\}$
7. $L(d) = \{3, L(b) + p(b, d)\} = L(b) + p(b, d) = 1 + 1 = 2$, $L(e) = L(b) + p(b, e) = 8$, $L(c) = L(b) + p(b, c) = 3$;
4. $e \notin S$
5. $L(d) = \min_{x \notin S} L(x)$
6. $S = \{a, b, d\}$
7. $L(e) = \min\{8, L(d) + p(d, e)\} = L(d) + p(d, e) = +5 = 7$, $L(c) = \min\{3, L(d) + p(d, e)\} = L(d) + p(d, c) = 3 = L(b) + p(b, c)$;
4. $e \notin S$
5. $L(c) = \min_{x \notin S} L(x)$
6. $S = \{a, b, d, c\}$
7. $L(e) = \min\{7, L(c) + p(c, e)\} = \min\{7, 3 + 3\} = L(c) + p(c, e) = +5 = 6$
4. $e \notin S$
5. $L(e) = \min_{x \notin S} L(x)$
6. $S = \{a, b, d, c, e\}$
4. $e \in S$
9. $L(e) = 6 =$ (distância de a a e).