Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática
1^a. Frequência - 11/05/2001 - Resolução

1. (a) $p \rightarrow q$
   (b) $p \leftrightarrow q$
   (c) $q \rightarrow p$
   (d) $q \rightarrow p$
   (e) $q \rightarrow p$
   (f) $p \vee q$
   (g) $p \dot{\vee} \neg q$

2. Uma tautologia é uma fórmula bem formada do cálculo proposicional que é verdadeira para todos os valores lógicos possíveis dos átomos.

   Para mostrar que $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$ é uma tautologia, basta mostrar que sempre que o valor lógico de $((p \vee q) \wedge \neg p)$ é verdadeiro, também o é o valor lógico de q. Seja $((p \vee q) \wedge \neg p)$ verdadeiro. Então $p \vee q$ e $\neg p$ são ambas verdadeiras, por definição da conjunção. Em particular, p é falsa. Mas então, para que a disjunção $p \vee q$ seja verdadeira, tem de ser q verdadeira.

3. (a) O argumento está correcto. Representando por p a afirmação "O número $\log_2 3$ é irracional" e por q a afirmação "$\log_2 3$ não é igual à razão de dois inteiros", podemos representar o argumento do seguinte modo:

   $$\begin{array}{l} q \rightarrow p \\ \underline{q \qquad\quad} \\ p \end{array}$$

   Ou seja, $q \rightarrow p, q \vdash p$. A regra de inferência usada é o Modus Ponens.

   (b) O argumento não está correcto. Para o concluir basta ver que -2 é um número real tal que $(-2)^2 > 1$, mas $-2 \not> 1$.

   (c) O argumento está correcto. Representando por p a afirmação "n é um número real tal que $n > 3$" e por q a afirmação "n é um número real tal que $n^2 > 9$", podemos representar o argumento do seguinte modo:

   $$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\neg q \qquad\quad} \\ \neg p \end{array}$$

   Ou seja, $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$. A regra de inferência usada é o Modus Tollens.

   (d) O argumento está correcto. Representando por p a afirmação "A função f tem derivada nula no ponto a" e por q a afirmação "A função f não tem derivada em a", podemos representar o argumento do seguinte modo:

   $$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg q \qquad\quad} \\ p \end{array}$$

   Ou seja, $p \vee q, \neg q \vdash p$. A regra de inferência usada é o Silogismo Disjuntivo.

4. (a) (a1) $\exists x P(x)$
   (a2) $\exists x \neg P(x)$
   (a3) $\forall x P(x)$
   (b) (b1) $\forall y Q(y)$
   (b2) $\exists y \neg Q(y)$

5. (a) Duas fórmulas bem formadas do cálculo de predicados dizem-se logicamente equivalentes se tiverem o mesmo valor lógico para todas as interpretações possíveis.
   (b) Relativamente à interpretação seguinte

Universo: Conjunto dos números reais
$P(x,y) := x+y=0$,

a fórmula bem formada $\forall y \exists x P(x,y)$ é verdadeira, visto que para cada número real y o número $x=-y$ satisfaz a igualdade $y+(-y)=0$; por outro lado, $\exists x \forall y P(x,y)$ é falsa, porque não existe nenhum número real x tal que para todo o real y se tenha $x+y=0$.

(c) Não, já que, como visto na alínea anterior, existe uma interpretação que torna uma verdadeira e a outra falsa.

(d) Uma fórmula bem formada de cálculo de predicados diz-se válida se for verdadeira para todas as interpretações possíveis.

(e) Escolhida uma interpretação para a fbf $(\exists x \forall y P(x,y)) \rightarrow (\forall y \exists x P(x,y))$, suponhamos que $\exists x \forall y P(x,y)$ é verdadeira nessa interpretação. Então existe um elemento x do universo tal que, para qualquer elemento y do universo, $P(x,y)$ toma o valor lógico verdadeiro. Mas então, para todo o y do universo, a fbf $\exists x P(x,y)$ toma o valor lógico verdadeiro, pelo que $\forall y \exists x P(x,y)$ é verdadeira. Consequentemente, a implicação é verdadeira para qualquer interpretação e, portanto, a fbf é válida.

6. O erro está no passo 4, visto que se usou Introdução Universal sobre um predicado que contém uma variável subescrita.

7. (a) $A \times \{1,2\} = \{(a,1),\ (a,2),\ (\{a\},1),\ (\{a\},2),\ (\{\{a\}\},1),\ (\{\{a\}\},2)\,\}$;
   (b) $2^A - \{A,\ \{\{a\},\ \{\{a\}\}\}\,\} = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{\{a\}\},\ \{\{\{a\}\}\},\ \{a,\{a\}\},\ \{a,\ \{\{a\}\}\,\}$;
   (c) $A \cap \{a,\ \{\{a\}\},\ \{a,\{a\}\}\,\} = \{a,\ \{\{a\}\}\}$;
   (d) $A \times \{1\} \times \{2\} = \{(a,1,2),\ (\{a\},1,2),\ (\{\{a\}\},1,2)\,\}$.

8. (a)

$$\begin{aligned} A-(B\cap C) &= A\cap (B\cap C)^c \\ &= A\cap (B^c \cup C^c) \\ &= (A\cap B^c)\cup(A\cap C^c) \\ &= (A-B)\cup(A-C)\,. \end{aligned}$$

   (b) Para $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$ e $C=\{2,4\}$, tem-se $(A-B)-C=\{2\}-\{2,4\}=\emptyset$ e $A-(B-C)=\{1,2\}-\{1,3\}=\{2\}$.

9. Seja $R=\{(1,1),\ (1,3),\ (2,4),\ (3,2)\}$ uma relação no conjunto $\{1,2,3,4\}$. Determine:

(a) Considerando os elementos do conjunto $\{1,2,3,4\}$ ordenados pela ordem natural, tem-se

$$M_R = \begin{bmatrix} 1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{R^2} = M_R \odot M_R = \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

(b) Fecho reflexivo de R: $\{(1,1),\ (1,3),\ (2,4),\ (3,2),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\,\}$.

(c) Fecho simétrico de R: $\{(1,1),\ (1,3),\ (2,4),\ (3,2),\ (3,1),\ (4,2),\ (2,3)\,\}$

(d) A matriz do fecho transitivo de R é $M_R \bigvee M_{R^2} \bigvee M_{R^3} \bigvee M_{R^4}$, ou seja, a matriz $M_R \bigvee M_R^{(2)} \bigvee M_R^{(3)} \bigvee M_R^{(4)}$.

M_R e $M_R^{(2)}$ foram calculadas em (a).

$$M_R^{(3)} = M_R \odot M_R^{(2)} = \begin{bmatrix} 1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \bigodot \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

$$M_R^{(4)} = M_R^{(2)} \odot M_R^{(2)} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \bigodot \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Logo a matriz do fecho transitivo de R é

$$\begin{bmatrix} 1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \bigvee \begin{bmatrix} 1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \bigvee \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \bigvee \begin{bmatrix} 1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por conseguinte, o fecho transitivo de R é

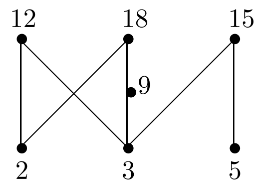
$$\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,4),\ (3,2),\ (3,4)\}.$$

10. (a) R é reflexiva, porque, para todo o $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0$ é um número par; é simétrica, porque para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$, se $x - y$ for par, então, como $y - x = -(x - y)$, $y - x$ também é par. Para mostrar que R é transitiva, sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tais que xRy e yRz, ou seja, tais que $x - y$ é par e $y - z$ é par. Então, como $x - z = (x - y) + (y - z)$, $x - z$ é a soma de dois números pares e, portanto, um número par, i.e., xRz. Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, é uma relação de equivalência.

    (b) Se x e y são pares, então $x - y$ é par, ou seja, xRy. Se x e y são ímpares, então $x - y$ é par, ou seja, xRy. Se x é par e y é ímpar, então $x - y$ é ímpar. Portanto, dados $x, y \in \mathbb{Z}$, xRy se e só se x e y são ambos pares ou x e y são ambos ímpares. Logo R tem duas classes de equivalência, uma constituída por todos os números pares, a outra constituída por todos o números ímpares.

11. (a) Para todo o $x \in A$, tem-se que x divide x, logo D é reflexiva. Para quaisquer $x, y \in A$, se x divide y e y divide x, então tem de ter-se $x = y$, logo D é anti-simétrica. Se $x, y, z \in A$ são tais que x divide y e y divide z, então x divide z; logo D é transitiva. Como D é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, é uma relação de ordem parcial.

    (b) Diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado (A, D):



12. (a) $xF^{-1}y \Leftrightarrow yFx \Leftrightarrow$ (y é filho(a) de x) $\Leftrightarrow$ (x é pai ou mãe de y);

    (b) $x(F \cdot F)y \Leftrightarrow \exists z\,(xFz \wedge zFy) \Leftrightarrow$ (existe z tal que x é filho(a) de z e z é filho(a) de y) $\Leftrightarrow$ (x é neto(a) de y);

    (c)

$$\begin{aligned} x(F \cdot G \cdot F^{-1})y &\Leftrightarrow \exists z \exists w (xFz \wedge zGw \wedge wF^{-1}y) \\ &\Leftrightarrow \text{(existem } z \text{ e } w \text{ tais que } x \text{ é filho(a) de } z,\ z \text{ é irmã(o) de } w \text{ e } w \text{ é pai ou mãe de } y) \\ &\Leftrightarrow x \text{ é primo(a) de } y. \end{aligned}$$