Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática
2ª Frequência - 26/06/2001

Duração: 2h

1. Relativamente a cada uma das funções parciais seguintes, indique o conjunto de partida, o domínio, o conjunto de chegada e o contradomínio, bem como se se trata de uma função.
   (a) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $g(m,n) = \frac{m}{n}$.
   (b) $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $h(m,n) = (m+n)\text{mod}11$.

2. Seja X um conjunto.
   (a) Sendo X igual ao conjunto de todos números inteiros, indique, justificando convenientemente, uma função $f : X \to X$ que seja sobrejectiva mas não seja injectiva.
   (b) Se X for um conjunto finito, é possível definir uma função $f : X \to X$ que seja sobrejectiva mas não injectiva? Porquê?

3. Seja B o conjunto de todos os números pares que começam por 9 e têm 6 dígitos.
   (a) Indique uma função bijectiva de B para $N \times A^4 \times P$, onde $N = \{9\}$, $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $P = \{0,2,4,6,8\}$.
   (b) Determine o número de elementos do conjunto B.

4. Prove por indução sobre n que, para todo o natural n, se verifica a igualdade:
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}.$$

5. (a) Dê uma definição recursiva de árvore binária sobre um conjunto X.
   (b) Represente graficamente a árvore binária $((((), d, (g)), b, ()), a, ((e), c, (f)))$.
   (c) Dê uma definição recursiva do conjunto $\mathcal{T}$ de todas as árvores binárias não vazias sobre o conjunto $\{0,1\}$ tais que cada vértice com filhos tem dois filhos.

6. Seja $\mathcal{C}$ um conjunto de *strings* sobre o conjunto $\{x,y\}$ definido recursivamente por:
   1. A *string* x pertence a $\mathcal{C}$;
   2. Se $S \in \mathcal{C}$, então xSx e ySy pertencem a $\mathcal{C}$.

   Escreva todas as *strings* do conjunto $\mathcal{C}$ de comprimento menor ou igual a 5.

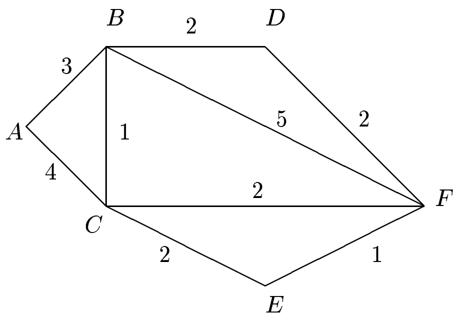
7. Um digrafo simples G de vértices 1, 2, 3, 4, 5, 6 tem a seguinte matriz de adjacências, considerando os vértices ordenados pela ordem natural:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Desenhe o digrafo, dispondo os vértices em duas linhas horizontais, a primeira com 1, 2 e 3, e a segunda com 4,5 e 6.
   (b) Indique a matriz dos caminhos do grafo.
   (c) Determine as componentes fracas, unilaterais e fortes do grafo.
   (d) Sem calcular a matriz A^4, indique, justificando, as suas entradas nas posições
   (i) 1,1 (ii) 4,2 (iii) 5,6.

V.S.F.F.

8. (a) Desenhe o grafo completo de três vértices, K_3. Defina ciclo de Euler e diga, justificando, se K_3 tem ou não um ciclo de Euler, indicando-o em caso afirmativo.

   (b) Diga, justificando, quais os grafos completos K_n, $n \geq 1$, que têm um ciclo de Euler.

9. Relativamente ao grafo com pesos da figura, escreva todos os caminhos elementares de A para F e indique, justificando, um caminho mais curto e a distância de A a F.



10. Seja $G = (V, E)$ um digrafo simples e $v \in V$. Seja
$S = \{u \in V \; : \;$ existe um caminho de u para v e existe um caminho de v para $u\}$.

    (a) Mostre que S forma uma componente forte de G que contém v.

    (b) Mostre que se R é uma componente forte que contém v então tem de ser $R = S$.

    (c) Conclua que as componentes fortes de um digrafo simples determinam uma partição do conjunto dos vértices.