Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática
2^a. Frequência - 26/06/2001 - Resolução

1. (a) Conjunto de partida: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
conjunto de chegada: $\mathbb{Q}$;
domínio: $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$;
contradomínio: $\mathbb{Q}$.
Não é uma função porque o domínio é diferente do conjunto de partida.

   (b) Conjunto de partida: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
conjunto de chegada: $\mathbb{Q}$;
domínio: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
contradomínio: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
É uma função visto que todos os elementos do conjunto de partida têm imagem.

2. (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$
é sobrejectiva, visto que, dado $z \in \mathbb{Z}$, $f(2z) = \frac{2z}{2} = z$; mas não é injectiva porque $f(1) = f(2) = 1$, ou seja, 1 e 2 são dois objectos diferentes com a mesma imagem.

   (b) Não. Com efeito, sejam $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $f : X \to X$ uma função sobrejectiva. Então, para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$, existe $i_j \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $f(x_{i_j}) = x_j$. Mas então $\{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}\}$ é um subconjunto de X com n elementos diferentes, logo igual a X. Para $j \neq j'$, tem-se $x_j \neq x_{j'}$, logo $f(x_{i_j}) \neq f(x_{i_{j'}})$ e, portanto, a elementos diferentes de X correspondem imagens diferentes. Consequentemente f é também injectiva.

3. (a) $g : B \longrightarrow N \times A^4 \times P$ tal que, para cada $9 \times 10^5 + a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + e \in B$,
$$g(9 \times 10^5 + a \times 10^4 + b \times 10^3 + c \times 10^2 + d \times 10 + e) = (9, a, b, c, d, e)$$
é uma função bijectiva.

   (b) $\text{card}(B) = \text{card}(N \times A^4 \times P) = \text{card}(N) \times \text{card}(A^4) \times \text{card}(P) = 1 \times 10^4 \times 5 = 50\,000$.

4. Base indutiva:
$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{0} (-1)^{k+1} k^2 &= 0, \text{ por definição de somatório} \\ &= \tfrac{(-1)^{0+1} \times 0 \times (0+1)}{2}. \end{aligned}$$
Logo a propriedade verifica-se para $n = 0$.

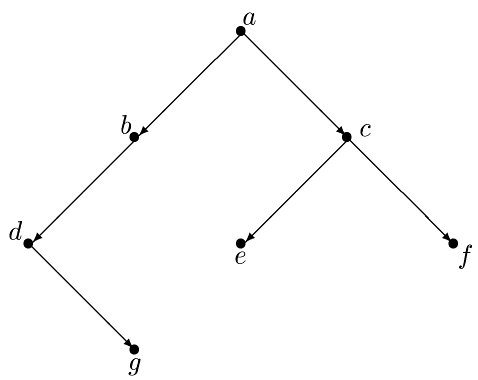
Hipótese indutiva: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$

Passo indutivo: Queremos mostrar que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 = \frac{(-1)^{n+2} (n+1)(n+2)}{2}$.
$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 + (-1)^{n+1+1} (n+1)^2 \\ &= \tfrac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2} (n+1)^2, \text{ por hipótese indutiva} \\ &= \tfrac{(-1)^{n+1} n(n+1) + (-1)^{n+2} 2(n+1)^2}{2} \\ &= \tfrac{(-1)^{n+2} (n+1)(-n+2(n+1))}{2} \\ &= \tfrac{(-1)^{n+2} (n+1)(-n+2n+2)}{2} \\ &= \tfrac{(-1)^{n+2} (n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusão: Para todo o natural n, verifica-se a igualdade $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$.

5. (a) 1. A árvore vazia ( ) é uma árvore binária sobre X.
   2. Se $x \in X$ e A e B são árvores binárias sobre X, então (A, x, B) é uma árvore binária sobre X.

   (b) .



   (c) 1. (0) e (1) pertencem a $\mathcal{T}$.
   2. Se A e B pertencem a $\mathcal{T}$, $(A, 0, B)$ e $(A, 1, B)$ pertencem a $\mathcal{T}$.

6. x

   xxx

   yxy

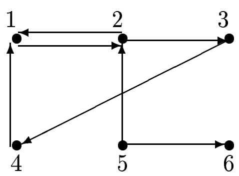
   $xxxxx$

   $yxxxy$

   $xyxyx$

   $yyxyy$

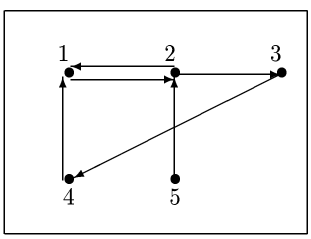
7. (a)

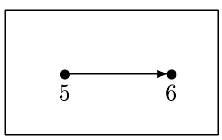


   (b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

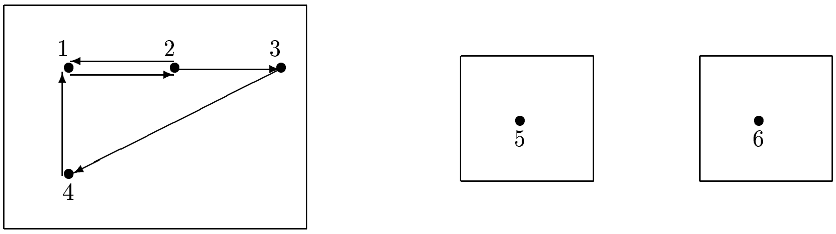
   (c) Tem uma só componente fraca, o próprio grafo, visto ele ser fracamente conexo.

   Componentes unilaterais:



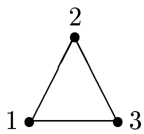


Componentes fortes:



(d) (i) 2, porque existem 2 caminhos de comprimento 4 de 1 para 1;
(ii) 1, porque existe apenas 1 caminho de comprimento 4 de 4 para 2;
(iii) 0, porque não existem caminhos de comprimento 4 de 5 para 6.

8. (a) Designando os seus vértices por 1,2 e 3, K_3 pode representar-se por



Um ciclo de Euler num grafo é um ciclo que contém cada uma das arestas do grafo uma e uma só vez. K_3 tem ciclos de Euler, por exemplo, $< 1, 2, 3, 1 >$.

(b) Um grafo não dirigido tem um ciclo de Euler se e só se for conexo e cada um dos seus vértices tem grau par. Se n é ímpar, o grau de cada vértice de K_n é par e, como K_n é conexo, conclui-se que tem um ciclo de Euler. Se n é par, o grau de cada vértice de K_n é ímpar e portanto K_n não tem nenhum ciclo de Euler.

9. Caminhos elementares de A para F: $< A, B, D, F >$, $< A, B, F >$, $< A, B, C, F >$, $< A, B, C, E, F >$, $< A, C, B, D, F >$, $< A, C, B, F >$, $< A, C, F >$, $< A, C, E, F >$.

Pesos destes caminhos, pela mesma ordem: 7, 8, 6, 7, 9, 10, 6, 7.

Um caminho mais curto é um caminho de peso mínimo e a distância entre A e F é igual a esse peso mínimo. Portanto, $< A, C, F >$ é um caminho mais curto e $d(A, F) = 6$.

10. (a) É claro que $v \in S$ visto que de v para v existe o caminho trivial $< v >$. Para mostrar que o subgrafo de G gerado por S é fortemente conexo, considerem-se dois vértices x e y em S. Então existe um caminho de x para v e existe um caminho de v para y. Juntando os dois caminhos obtém-se um caminho entre x e y. Para mostrar que S é uma componente forte, resta mostrar que se $S \subseteq R$ sendo o subgrafo gerado por R fortemente conexo, então $R = S$. Se $S \subseteq R$, $v \in R$. Seja $x \in R$. Então, como R é fortemente conexo, existe um caminho de x para v e um caminho de v para x. Mas nesse caso, $x \in S$. Portanto $R \subseteq S$, donde $R = S$.

(b) Seja R uma componente forte que contém v. Para concluir que $R = S$, basta mostrar que $R \subseteq S$. Seja $x \in R$. Então, como $v \in R$ e o subgrafo gerado por R é fortemente conexo, existe um camiho de v para x e um caminho de x para v. Isto significa que $x \in S$. Logo $R \subseteq S$.

(c) Pela alínea (a), conclui-se que todo o vértice de G pertence a alguma componente forte. Pela alínea (b), conclui-se que cada vértice pertence a uma única componente conexa. Consequentemente, as componentes fortes de um digrafo simples determinam uma partição do conjunto dos vértices.