

Decomposição de frações racionais em frações parciais

Seja

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad (1)$$

uma fração com $p(x)$ e $q(x)$ polinómios tais que $\text{grau}(p(x)) < \text{grau}(q(x))$. Seja

$$q(x) = K(x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1}(x^2 + b_2x + c_2)^{\beta_2} \dots (x^2 + b_sx + c_s)^{\beta_s}$$

a decomposição de $q(x)$ em factores indecomponíveis, do primeiro grau, $(x - a_k)$, $k = 1, 2, \dots, r$, e do segundo grau, $(x^2 + b_kx + c_k)$, $k = 1, 2, \dots, s$ (Claro que os factores indecomponíveis do 2º grau só podem aparecer no caso de os polinómios serem de coeficientes e variável x reais; nesse caso, os polinómios $x^2 + b_kx + c_k$ não têm raízes reais).

Nestas condições, $\frac{p(x)}{q(x)}$ pode decompor-se numa soma de fracções parciais do seguinte modo:

- A cada factor $(x - a_k)^{\alpha_k}$, corresponde uma soma da forma

$$\frac{A_1}{x - a_k} + \frac{A_2}{(x - a_k)^2} + \dots + \frac{A_{\alpha_k-1}}{(x - a_k)^{\alpha_k-1}} + \frac{A_{\alpha_k}}{(x - a_k)^{\alpha_k}}$$

onde $A_1, A_2, \dots, A_{\alpha_k}$ são constantes.

- A cada factor indecomponível $(x^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k}$, corresponde uma soma da forma

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_kx + c_k} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + b_kx + c_k)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_k-1}x + C_{\beta_k-1}}{(x^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k-1}} + \frac{B_{\beta_k}x + C_{\beta_k}}{(x^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k}}$$

onde $B_1, B_2, \dots, B_{\beta_k}, C_1, C_2, \dots, C_{\beta_k}$ são constantes.

Para determinar as constantes $A_1, A_2, \dots, A_{\alpha_k}, B_1, B_2, \dots, B_{\beta_k}, C_1, C_2, \dots, C_{\beta_k}$, podem usar-se várias técnicas de cálculo, algumas delas ilustradas a seguir:

1º. Um exemplo do método dos coeficientes indeterminados:

Para decompor a fracção

$$\frac{2x}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1},$$

que tem o grau do numerador inferior ao do denominador, começa-se por decompor o denominador em factores indecomponíveis. Tem-se

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2(x^2 + 1).$$

Por conseguinte, existem constantes A_1, A_2, B_1, C_1 tais que

$$\frac{2x}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{(x + 1)^2} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + 1}. \quad (2)$$

Reduzindo o segundo membro desta igualdade ao mesmo denominador, concluímos que tem de se verificar a igualdade

$$2x = A_1(x + 1)(x^2 + 1) + A_2(x^2 + 1) + (B_1x + C_1)(x + 1)^2. \quad (3)$$

Como dois polinómios são iguais se e só se tiverem os coeficientes dos monómios do mesmo grau iguais, vem:

$$\begin{aligned} x^3 &: 0 = A_1 + B_1 \\ x^2 &: 0 = A_1 + A_2 + 2B_1 + C_1 \\ x &: 2 = A_1 + B_1 + 2C_1 \\ x^0 &: 0 = A_1 + A_2 + C_1 \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema de quatro equações nas incógnitas A_1 , A_2 , B_1 e C_1 , vem

$$A_1 = 0, A_2 = -1, B_1 = 0 \text{ e } C_1 = 1.$$

2º. Um outro processo de obter os valores de A_1 , A_2 , B_1 e C_1 , é usar a substituição de x por valores na igualdade (3), escolhidos de forma a simplificar as contas. Sempre que temos um factor da forma $(x - a)$ é vantajoso usar a substituição $x = a$. A seguir ilustra-se este processo para o exemplo acima:

$$\begin{aligned} x = -1 &: -2 = 2A_2 \\ x = 0 &: 0 = A_1 + A_2 + C_1 \\ x = 1 &: 2 = 4A_1 + 2A_2 + 4(B_1 + C_1) \\ x = -2 &: -4 = -5A_1 + 5A_2 + (-2B_1 + C_1) \end{aligned}$$

A partir deste sistema rapidamente se chega aos valores das constantes A_1 , A_2 , B_1 e C_1 .

3º. Se $\frac{D}{(x-a)^r}$ é uma das fracções simples que fazem parte da decomposição de (1), que corresponde a uma raiz a do denominador de multiplicidade $m(\geq r)$, a constante D pode ser obtida pela fórmula

$$D = \frac{1}{(m-r)!} \frac{d^{m-r}}{dx^{m-r}} \left((x-a)^m \frac{p(x)}{q(x)} \right) \Bigg|_{x=a}$$

$$\text{Exemplo: } \frac{1}{(x+2)(x-1)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

$$A = \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dx^{1-1}} \left((x+2) \frac{1}{(x+2)(x-1)^3} \right) \Bigg|_{x=-2} = -\frac{1}{27}$$

$$B = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^{3-1}}{dx^{3-1}} \left((x-1)^3 \frac{1}{(x+2)(x-1)^3} \right) \Bigg|_{x=1} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{x+2} \right) \Bigg|_{x=1} = \frac{1}{27}$$

$$C = \frac{1}{(3-2)!} \frac{d^{3-2}}{dx^{3-2}} \left((x-1)^3 \frac{1}{(x+2)(x-1)^3} \right) \Bigg|_{x=1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x+2} \right) \Bigg|_{x=1} = -\frac{1}{9}$$

$$D = \frac{1}{(3-3)!} \frac{d^{3-3}}{dx^{3-3}} \left((x-1)^3 \frac{1}{(x+2)(x-1)^3} \right) \Bigg|_{x=1} = \frac{d^0}{dx^0} \left(\frac{1}{x+2} \right) \Bigg|_{x=1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Portanto, } \frac{1}{(x+2)(x-1)^3} = \frac{-1/27}{x+2} + \frac{1/27}{x-1} + \frac{-1/9}{(x-1)^2} + \frac{1/3}{(x-1)^3}.$$