Departamento de Matemática
Escola Superior de Tecnologia - Instituto Politécnico de Viseu
MATEMÁTICA DISCRETA - Eng. de Sistemas e Informática
1ª Frequência - 02/05/2002

Duração: 2h

1. Seja p a proposição "Sou responsável", q a proposição "Passo a Matemática Discreta" e r a proposição " Vou fazer férias nas Bermudas". Traduza as frases seguintes por meio de fórmulas proposicionais.
   (a) Se passar a Matemática Discreta, vou fazer férias nas Bermudas.
   (b) Para fazer férias nas Bermudas é suficiente que eu seja responsável.
   (c) Para passar a Matemática Discreta é necessário que eu seja responsável.
   (d) Passo a Matemática Discreta só se for responsável.
   (e) Se passar a Matemática Discreta, vou fazer férias nas Bermudas se for responsável.

2. Verifique se a fórmula bem formada $p \wedge r \wedge (p \vee q \rightarrow \neg r)$ é uma tautologia, uma contradição ou uma contingência.

3. Averigue se os seguintes argumentos estão correctos, indicando, para cada argumento correcto, a regra de inferência da Tabela RI que é usada.
   (a) O resto da divisão de um número par n por 4 é 0 ou 2. Assim, se o resto da divisão de um número par n por 4 não é 0, então é 2.
   (b) Se n é um número primo então é ímpar ou igual a 2. Logo se n é um número par diferente de 2, concluimos que n não é primo.
   (c) Se a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x+1}{2} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$, então é contínua em todo o $\mathbb{R}$. Como a função f é contínua em todo o $\mathbb{R}$, concluimos que f é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$.

4. Seja $P(x)$ a afirmação "O estudante x fala japonês" e seja $Q(y)$ a afirmação "O curso y tem um estudante que fala japonês".
   (a) Considerando para universo de discurso o conjunto de todos os estudantes dos cursos de engenharia, traduza as frases seguintes em fórmulas bem formadas de cálculo de predicados.
   (a1) Há pelo menos um estudante que fala japonês.
   (a2) Nenhum estudante fala japonês.
   (b) Considerando para universo de discurso o conjunto de todos os cursos de engenharia, traduza as frases seguintes em fórmulas bem formadas de cálculo de predicados.
   (b1) Todo o curso tem algum estudante que fala japonês.
   (b2) Existe pelo menos um curso onde nenhum estudante fala japonês.

5. (a) Diga quando é que duas fórmulas bem formadas do cálculo de predicados se dizem logicamente equivalentes.
   (b) Apresente uma interpretação para a qual a fórmula bem formada $p(t) \wedge \forall x q(x)$ seja verdadeira e $\forall x(p(x) \wedge q(x))$ seja falsa.
   (c) As duas fórmulas da alínea anterior serão logicamente equivalentes? Justifique.
   (d) Atendendo às alíneas anteriores, é evidente que não se pode deduzir $\forall x(p(x) \wedge q(x))$ de $p(t)$ e $\forall x q(x)$. Descubra então o(s) erro(s) da seguinte demonstração formal:

V.S.F.F.

1. $\forall x q(x)$	premissa
2. $q(t)$	1 e EU
3. $p(t)$	premissa
4. $p(t) \wedge q(t)$	3, 2 e LC
5. $\forall x(p(x) \wedge q(x))$	4 e IU

(e) Faça uma demonstração formal do teorema: $\forall t p(t), \forall x q(x) \vdash \forall x(p(x) \wedge q(x))$.

6. Dados os conjuntos $A = \{\emptyset, 1, \{\emptyset\}, \{1\}\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, determine:

(a) $B - \{3\}$; (b) $A \times (B - \{3\})$; (c) $A - \{\emptyset, 1\}$;

(d) 2^B; (e) $A \cap B$; (f) $A \cap \{\emptyset, \{1, \{1\}\}\}$.

7. (a) Mostre que para quaisquer conjuntos A, B e C se tem a igualdade

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)\,.$$

(b) Arranje conjuntos A, B e C tais que

$$A - (B \cup C) \neq (A - B) \cup (A - C)\,.$$

8. A relação R definida no conjunto $\{a, b, c\}$ é, relativamente à ordenação alfabética dos seus elementos, representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Escreva R sob a forma de conjunto de pares ordenados.

(b) Diga, justificando, se R é reflexiva, irreflexiva, simétria, anti-simétria ou transitiva.

(c) Determine a matriz da relação $R \cdot R$.

9. Considere, no universo das pessoas, as relações F e G definidas a seguir:

$$xFy \text{ sse } x \text{ é filho(a) de } y$$

$$xGy \text{ sse } x \text{ é irmã(o) de } y$$

(a) Averigue se F goza das seguintes propriedades: reflexividadade, irreflexividade, simetria, anti-simetria, transitividade.

(b) Nesta alínea, suponha que o conjunto sobre o qual se definem as relações dadas, é apenas {João, Ana, Sara, Zé, Bé, Tó}. Sabendo que Ana e Sara são irmãs e que João e Ana são os pais de Zé, Bé, e Tó, escreva em extensão o conjunto de todos os pares das relações:
(i) F (ii) F^{-1} (iii) $F \cdot G$

(c) Em cada uma das alíneas seguintes, indique, justificando convenientemente, qual o grau de parentesco entre duas pessoas x e y tais que (x, y) pertence à relação indicada:
(i) F^{-1} (ii) $F \cdot G$ (iii) $F \cdot G \cdot F^{-1}$