Departamento de Matemática – Escola Superior de Tecnologia – Instituto Politécnico de Viseu

Complementos de Análise Matemática

Engenharia de Sistemas e Informática

1ª. Frequência - 16/11/2004

Duração: 1h 30m

1. Seja P uma placa plana quadrada com lado de medida 2 unidades. Considerando um referencial ortonormado de origem no centro da placa, a temperatura em cada ponto de coordenadas (x, y) é dada, em graus centígrados, por $T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \vee y = 0. \end{cases}$

   (a) Faça uma representação gráfica do conjunto $P \backslash \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$ e diga se é aberto, fechado, limitado ou compacto. Indique também o conjunto dos pontos de acumulação desse conjunto.

   (b) Determine os seguintes limites:
   (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, onde $a \neq 0$; (ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, onde $a \neq 0$; (iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

   (c) Determine o domínio de continuidade da função $T(x, y)$.

   (d) Determine o gradiente de T para $(x, y) \in P \backslash \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$.

   (e) Determine a derivada direccional de T no ponto $(1, 2)$ segundo o vector de coordenadas $(1, -1)$.

   (f) Em que direcção a temperatura aumenta mais rapidamente no ponto $(1, 2)$? Qual a taxa de variação da temperatura segundo essa direcção?

   (g) Suponha agora que x e y são funções do tempo t dadas por $x = e^{-t}$ e $y = e^{-2t}$ e considere T como uma função de t. Use a regra da cadeia para determinar $T'(t)$. Qual a taxa de variação da temperatura no instante $t = 0$?

2. Se R é a resistência equivalente de duas resistências conectadas em paralelo, com valores R_1 e R_2, então $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. Se as resistências medem em ohms $R_1 = 40\,\Omega$ e $R_2 = 50\,\Omega$, com precisão de 0.2% em cada uma, use o diferencial para estimar o erro máximo da resistência equivalente de R.

3. Seja B a região do plano limitada pela parábola $y = x^2$ e pelas rectas $y = -2x - 1$ e $y = 2x - 1$.

   (a) Calcule o integral $\displaystyle\int\int_B (4y + 8)dA$.

   (b) Seja E o cilindro de base B no plano XOY e altura 4. Sabendo que a densidade de E é dada por $\rho(x, y, z) = y + z$, determine a massa de E.

4. Determine a solução geral explícita da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$.

5. A equação diferencial $\dfrac{dP}{dt} = k(M - P(t))$ é considerada como um modelo razoável para a aprendizagem de uma habilidade, onde $P(t)$ é o nível de desempenho de alguém aprendendo essa habilidade como função do tempo de treino t. Determine a expressão de $P(t)$ sabendo que $P(0) = 2$.

6. Considere as funções reais de variável real $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = \sin^2 x$, $h(x) = \tan^2 x$, $i(x) = 2$, $j(x) = \sin x$ e $k(x) = e^x$ definidas no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Indique, justificando devidamente a sua resposta:

   (a) Três delas que formem um conjunto linearmente dependente;

   (b) duas delas que formem um conjunto linearmente independente.

Cotação:	1.	2.	3.	4.	5.	6.
	6	3.1	3.2	3.1	3.1	1.5